

Analisi di backtesting delle probabilità di default in ambito corporate

Carmela Angelino, Biagio Paolo Campanale, Francesco Masiello, Virginia Nappi, Camillo Pignalosa

IPE Working Paper

N. 19

December 20, 2020

ISSN 2284-1229

Analisi di backtesting delle probabilità di default in ambito corporate¹

Carmela Angelino

Biagio Paolo Campanale

Francesco Masiello

Virginia Nappi

Camillo Pignalosa

Abstract

Le condizioni di incertezza legate all'epidemia del Covid-19 inducono ad una riflessione circa la parametrizzazione dei modelli di rischio di credito. Per questo motivo si è deciso di realizzare uno studio volto a valutare la robustezza della metodologia usata da Cassa Depositi e Prestiti (CDP) per la stima delle probabilità di default (PD) through-the-cycle a partire da dati storici esogeni. L'approccio seguito nel project work è in linea con le indicazioni del Comitato di Basilea in termini di validazione dei modelli interni e prevede l'implementazione di un'analisi statistica di backtesting. Pertanto, preso in esame un precedente scenario macroeconomico di crisi come il 2008, si sono confrontate le PD stimate su dati fino al 2006 con i default realizzati negli anni successivi. L'analisi evidenzia l'importanza di considerare la correlazione tra i default, specialmente per le classi di rischio caratterizzate da PD contenute.

Abstract

The uncertain conditions linked to the Covid-19 epidemic suggest the need for a critical look at the parameters underlying credit risk models. For this reason, we decided to carry out a study to assess the robustness of the methodology used by Cassa Depositi e Prestiti (CDP) to estimate through-the-cycle probabilities of default (PD) from historical exogenous data. The

¹ Il presente Working Paper è stato realizzato con il contributo della Presidenza del Consiglio dei Ministri, Dipartimento per le Politiche giovanili e il Servizio Civile Universale, nell'ambito del Progetto "100 laureati 100 occupati. Realizzazione di un Ufficio Job Placement Permanente", AOPT/2016 Avviso Pubblico "Orientamento e Placement giovani talenti".

approach followed in this project work is in line with the indications of the Basel Committee in terms of validation of the internal models and involves the implementation of a statistical backtesting analysis. Therefore, having identified the 2008 crisis as a significant previous macroeconomic crisis scenario, the PDs estimated on data as of 2006 have been compared with the defaults that occurred in the following years. Our analysis highlights the importance of taking into account default correlation, in particular for rating classes with low PDs.

Sommario

Introduzione.....	5
Capitolo 1.....	Errore. Il segnalibro non è definito.
1.1 Introduzione.....	6
1.2 I criteri di rating delle agenzie e i dati esterni sui default.....	7
1.3 Probabilità di default.....	8
Capitolo 2.....	Errore. Il segnalibro non è definito.
2.1 Trattamento dei dati.....	12
2.1.1 Procedura di Nelson-Siegel-Svensson	16
2.2 Validation	17
2.2.1 Test Binomiale.....	17
2.2.2 Test Binomiale con correlazione.....	18
2.2.3 Hosmer-Lemeshow Test.....	21
Capitolo 3.....	22
3.1 Test binomiale.....	22
3.2 Test del chi quadro (Hosmer-Lemeshow).....	28
3.3 Test binomiale con correlazione.....	29
Conclusioni.....	35
Bibliografia.....	37
Appendice.....	38
Test binomiale	38
Test binomiale con correlazione.....	40

Introduzione

Cassa Depositi e Prestiti SpA (CDP) è un'istituzione finanziaria italiana, partecipata per oltre l'80% dallo Stato e per la parte restante da numerose fondazioni di origine bancaria, che da 170 anni ha come obiettivo di promuovere lo sviluppo sostenibile dell'Italia impiegando responsabilmente il risparmio del Paese in modo tale da favorire la crescita e l'occupazione.

Il suo portafoglio per oltre 150 anni è stato composto quasi esclusivamente da finanziamenti di medio e lungo termine finalizzati alla realizzazione di opere e al finanziamento di capex da parte di enti pubblici. CDP è così diventato il maggior finanziatore soprattutto di comuni, province e regioni. Successivamente, in particolare a partire dalla conversione in società per azioni avvenuta nel 2003, ha iniziato a finanziare anche corporate, nello specifico large corporate e società di progetto per la realizzazione di opere infrastrutturali e impianti, e negli ultimi anni finanzia anche corporate di dimensioni più piccole, sebbene in termini relativi in quanto si tratta comunque in grado di contrarre indebitamento nell'ordine di decine di milioni di euro. Tali cambiamenti della composizione del portafoglio di CDP risultano significativi e hanno reso necessario lo sviluppo di sistemi di risk management, che hanno l'obiettivo di valutare e monitorare il rischio di credito, cioè che i soggetti finanziati e in particolare le imprese private possano non essere in grado di adempiere alle obbligazioni contratte.

L'attribuzione della valutazione del merito creditizio (rating) viene effettuata internamente da CDP secondo criteri predefiniti, applicati secondo gli standard professionali tipici. Fino ad oggi l'incidenza storica dei default è risultata molto contenuta, sia in termini assoluti che relativi rispetto al sistema bancario italiano, considerato che tra i soggetti finanziati da CDP sono pochi quelli che non riescono ad adempiere ai propri obblighi, anche in ragione della focalizzazione dell'attività su asset class non retail e quindi in generale con merito di credito relativamente elevato.

Tuttavia, particolarmente in un momento storico legato alla pandemia del Covid-19, è importante effettuare una valutazione circa le probabilità di default stimate, testandone la robustezza attraverso un'analisi di *backtesting*. Pertanto, l'obiettivo del Project Work è di effettuare tale analisi considerando i dati empirici rilevati da uno dei principali provider di mercato prima della crisi del 2007-2008 per valutare se, applicando la metodologia di stima delle probabilità di default adottata da CDP ai dati pre-crisi, si ottengano risultati robusti rispetto all'esperienza storica dei dati realizzati durante la crisi.

1.1 Introduzione

Per far fronte al rischio di credito, ovvero il rischio che il debitore non sia in grado di adempiere in tutto o in parte ai suoi obblighi di rimborso del capitale e di pagamento degli interessi, il Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (BCBS) nel 2004 ha raccomandato l'utilizzo di sistemi di rating e di scoring come basi per la determinazione dei requisiti patrimoniali.

Per *rating* si intende l'attribuzione di un debitore ad una delle classi di rischio creditizio, predefinite in modo ordinale, normalmente indicate da lettere o numeri, al fine di dare un giudizio qualitativo sulla capacità del debitore stesso di generare risorse necessarie a far fronte agli impegni finanziari contratti. Ciò si attua mediante un'analisi in cui si considerano le caratteristiche economico-finanziarie e i parametri qualitativi della stessa, a differenza dello *scoring* che consiste in un punteggio sull'affidabilità creditizia di un'azienda, calcolato con l'applicazione di un modello statistico prefissato, che considera solo variabili quantificabili matematicamente, escludendo, così, fattori qualitativi.

In passato il rating veniva applicato più frequentemente per la valutazione di obbligazioni emesse da grandi società e lo scoring per la concessione dei crediti in ambito bancario. Successivamente, tali strumenti sono stati utilizzati per la determinazione della probabilità di default (PD) dei prenditori di fondi. Tali probabilità sono elementi cruciali per la determinazione del prezzo in caso di concessione del credito, nonché per la quantificazione del capitale da detenere a fronte del rischio di credito.

Con Basilea II per la determinazione del rischio di credito è possibile seguire due approcci: quello standard e quello interno (IRB – internal rating-based). Nel primo caso, le istituzioni finanziarie fanno uso di rating esterni, ovvero quelli definiti da agenzie esterne. Nel secondo, invece, le istituzioni finanziarie sono autorizzate ad applicare l'approccio IRB, in cui la determinazione del rating e delle probabilità di default è effettuata internamente. Tale ultimo approccio richiede che i valori di score siano mappati in un numero relativamente piccolo di classi di rating (almeno sette) la cui quantificazione è fatta a discrezione della banca. Tuttavia, esistono anche sistemi di rating, definiti ibridi, mediante i quali gli output generati mediante modelli statistici vengono corroborati da valutazioni qualitative di esperti.

A prescindere dal tipo di approccio utilizzato, è importante valutare la capacità predittiva del modello di rating utilizzato. Per capacità predittiva si intende non solo il potere

discriminatorio, ovvero la capacità di discriminare i 'cattivi' dai 'buoni' prenditori di fondi, ma anche la correttezza dei sistemi di calibrazione dei modelli di rating utilizzati. In quest'ultimo caso, infatti, il modello interno risulta corretto quando si trovano, per ciascuna classe di rating, PD allineate con quelle riscontrate empiricamente.

Pertanto, il BCBS afferma che le banche devono confrontare regolarmente i tassi di default realizzati con le PD stimate e, poi, essere in grado di dimostrare che tali stime rientrano nelle aspettative formulate per ciascuna classe di rating. Ciò è possibile mediante una procedura comunemente definita *backtesting*, che valuta l'accuratezza di un metodo di previsione a partire dai dati storici esistenti. CDP, pur non essendo soggetta a questa regolamentazione e non disponendo di dati interni statisticamente significativi, intende svolgere un'analisi di questo tipo facendo leva su dati esterni.

1.2 I criteri di rating delle agenzie e i dati esterni sui default

Per lo svolgimento dell'analisi sono stati utilizzati i dati ottenuti da una delle principali agenzie di rating che assegna dei giudizi di merito di credito alle entità sia pubbliche che private che ne fanno richiesta.

I rating sono determinati secondo un approccio forward-looking, ovvero secondo un'ottica previsionale. Di conseguenza, gli alti e bassi previsti dei cicli economici, sia che si tratti di un'industria specifica o relativa all'economia generale, dovrebbero essere sempre presi in considerazione nel rating del credito.

Per l'assegnazione del giudizio si segue un preciso iter. Inizialmente si attua una fase di valutazione in cui gli analisti provvedono a richiedere informazioni finanziarie, come bilanci e relazioni. È prevista anche una riunione con il management, il cui scopo è l'analisi nel dettaglio di politiche di gestione, dei modelli operativi e di altri fattori di impatto. Successivamente si procede alla revisione dei risultati finanziari pubblicati nei cinque anni precedenti la richiesta e si valutano anche tutte le informazioni di pubblico dominio riguardante la società in oggetto. Sulla base di ciò vengono calcolati e successivamente analizzati diversi indici finanziari e i loro trend anche per confrontare la società in oggetto con altre del suo stesso settore.

Fatto ciò, gli analisti convocano un comitato per la determinazione del rating e la società ne viene informata. Ad essa è consentito, se fosse in disaccordo, di presentare dati aggiuntivi all'agenzia, che possono essere presi in considerazione per un'eventuale modifica del rating.

La fase di analisi degli indicatori finanziari è considerata importante poiché il rating non deriva solo da un semplice processo di analisi quantitativa, ma anche qualitativa dato che si considera il contesto di business in cui opera ogni singola impresa. Tra i fattori di rischio di business e finanziario che entrano nel processo di rating delle principali agenzie ritroviamo: le caratteristiche del settore, la posizione competitiva, la regolamentazione, le caratteristiche e politiche finanziarie, la redditività e la struttura del capitale.

In base alle analisi effettuate, ogni emittente o emissione viene poi categorizzato a seconda del suo merito creditizio. Per Standard & Poor's e Fitch le categorie variano da AAA a D, dove la prima esprime il minimo rischio di default, mentre D il massimo. Altre agenzie, come Moody's e DBRS, utilizzano identificativi leggermente diversi, comunque con un numero di classi analogo e una sostanziale corrispondenza con le scale di Standard & Poor's e Fitch.

Successivamente alla pubblicazione di un rating pubblico, la società è soggetta a continui monitoraggi ed ogni avvenimento, come una fusione, acquisizione o operazioni straordinarie, può comportare una modifica del giudizio di merito. Pertanto, il processo non è statico, bensì dinamico.

1.3 Probabilità di default

Il rischio connesso ad un'esposizione creditizia è espresso attraverso diverse componenti tra le quali rientra la probabilità di default (PD), ovvero la probabilità che una controparte passi allo stato di default in un dato orizzonte temporale.

Nel sistema di rating di CDP la quantificazione della PD associata a ciascuna classe di rating avviene concettualmente in due fasi: nella prima CDP assegna ogni controparte ad una classe di rating, definita sulla base di criteri espliciti e formalizzati, nella seconda, invece, CDP determina una PD per ciascuna classe di rating che dovrà essere valida a ciascuna controparte inclusa nella stessa classe di rating, fissato un certo orizzonte di tempo (es. 1 anno).

Ad ogni classe di rating è possibile associare in relazione all'approccio utilizzato per la determinazione del rating:

- una stima di probabilità “trough-the-cycle” (TTC), che prescindere dalla fase ciclica contingente;
- una stima di probabilità “point-in-time” (PIT), che invece considera anche la fase ciclica contingente e che sarà più alta durante le fasi cicliche negative e più bassa in quelle positive.

La stima PIT fornisce una valutazione più accurata e tempestiva delle probabilità di inadempienza, mentre quella TTC restituisce probabilità caratterizzate da maggiore stabilità nel tempo, a discapito, però, della tempestività e della precisione.

L’obiettivo del Project Work è quello di testare soprattutto la robustezza delle PD “trough-the-cycle”.

Quindi, il rating di una società deve essere trasferibile in una corrispondente probabilità di default e considerato che ad ogni classe di rating è associata una probabilità di default, le classi devono essere ordinate in funzione del rischio creditizio. Ciò implica che muovendo da una classe meno rischiosa ad una più rischiosa, la probabilità che i debitori risultino in default è crescente.

Ci sono diversi possibili approcci da poter seguire per definire una PD, tra cui:

- **Approccio statico:** la PD per ogni singolo debitore è calcolata a partire dal valore del punteggio ottenuto con un modello di scoring. È possibile applicarlo solo nel caso in cui anche in fase di valutazione sia stato applicato un metodo quantitativo;
- **Approccio attuariale:** prevede che il tasso di insolvenza passato registrato sulle diverse classi di rating venga utilizzato come stima delle PD futura dei debitori assegnati alle differenti classi;
- **Approccio di mapping:** utilizzato da molte banche e si basa sulla corrispondenza tra i rating assegnati internamente e i rating delle diverse agenzie, utilizzando i tassi di default pubblicati da quest’ultime per la stima delle PD. Per questa metodologia bisogna prestare particolare attenzione poiché la corrispondenza potrebbe risultare imperfetta. In proposito, infatti, le agenzie di rating operano mediante una valutazione “through the cycle” mentre la maggior parte degli istituti finanziari operano seguendo il criterio del “point in time”. Questa differenza potrebbe rendere il mapping instabile e/o inaffidabile.

1.4 Il modello di rischio di credito di CDP

Per la stima della distribuzione delle perdite di portafoglio, CDP utilizza un modello che ha alcune caratteristiche in comune con l'approccio di Creditrisk+, dal quale tuttavia si discosta per l'introduzione di varianti, in parte mutate da altri modelli (in particolare da CreditMetrics), e in parte volte a tener conto delle caratteristiche del proprio portafoglio crediti e dell'orizzonte di lungo termine della propria attività di concessione del credito.

Per tale motivo si passeranno in rassegna le caratteristiche di Creditrisk+ per poi evidenziare le principali differenze con il modello utilizzato da CDP.

Creditrisk+ è un modello sviluppato da Credit Suisse Financial Products e si basa su un approccio di tipo attuariale. Il modello non si pone l'obiettivo di interpretare il processo che conduce all'insolvenza di un'impresa e non produce una propria stima endogena delle PD. Al contrario, assume che le probabilità di insolvenza dei debitori e i tassi di recupero dei loro crediti siano già stati stimati con altri strumenti, a partire dal rating. Creditrisk+ è un modello di tipo default-only, poiché modella solo il rischio legato agli eventi di insolvenza e non quello derivante dalla variabilità del valore dei finanziamenti in corrispondenza di transizioni di rating.

Creditrisk+ descrive la distribuzione di probabilità del numero di insolvenze future attraverso la distribuzione di Poisson.

Per passare dalla distribuzione del numero di insolvenze a quella delle perdite, è necessario considerare i valori delle esposizioni e dei relativi tassi di recupero attesi. Se un debitore diventa insolvente, la banca subisce una perdita pari al valore dell'esposizione diminuito dell'importo recuperato. La perdita in caso di insolvenza del debitore i -esimo è pari a :

$$L_i = LGD_i \cdot EAD_i = (1 - RR_i) \cdot EAD_i$$

dove L_i è la misura di perdita in caso di insolvenza; LGD_i è il tasso di perdita in caso di default della società debitrice; EAD_i l'esposizione al momento del default; RR_i è il tasso di recupero.

Creditrisk+ ipotizza che la banca sia in grado di stimare EAD e RR senza errore, e di associare ad ogni debitore, senza incertezza, il valore L_i .

L'output finale del modello è la distribuzione delle perdite di portafoglio, che tiene conto di tutte le classi di rating, dalla quale è possibile ricavare, oltre alla perdita attesa, la perdita inattesa tramite misure come la deviazione standard, il VaR o il CVaR.

Se si valutano le statistiche sul numero di default realizzati, è possibile osservare come la volatilità dei dati reali è superiore a quella dei dati teorici della distribuzione di Poisson. Quest'ultima ipotizza che i default siano indipendenti e ciò non avviene nella realtà dato che i default risentono tutti, in varia misura, dell'andamento del ciclo economico. Per ovviare a questa criticità, il modello ipotizza che le PD delle imprese siano variabili aleatorie funzione di n fattori sottostanti ("background factor"), ognuno rappresentativo di una determinata componente del ciclo economico.

In analogia al modello Creditrisk+, il modello di rischio di credito sviluppato in CDP utilizza un approccio di tipo attuariale e *default-only*.

L'orizzonte temporale di riferimento però, è multiperiodale data la strategia di finanziamento *buy and hold*. Infatti, tenendo conto della natura dei finanziamenti erogati, la distribuzione delle perdite si estende fino alla scadenza dell'ultimo finanziamento in portafoglio.

Ulteriore differenza con il modello sviluppato da Credit Suisse, è l'adozione di diverse ipotesi distributive sulle variabili fondamentali del modello, a cui si accompagna l'utilizzo della simulazione Monte Carlo per il calcolo della distribuzione delle perdite in riferimento a ciascuna delle scadenze, alla luce dei soli default e non delle transizioni alle classi di rating inferiori (approccio *default-only*). Il rischio di transizione viene colto indirettamente dalla modellizzazione del portafoglio su un orizzonte temporale esteso: le transizioni vengono in tal modo rappresentate nella misura in cui si traducono in un default entro la scadenza del finanziamento.

La misura principale adottata per il calcolo della perdita inattesa, è il Conditional VaR (C-VaR) che fornisce una migliore rappresentazione del rischio quantificato come il valore atteso di tutte le perdite possibili superiori al livello del VaR. Il C-VaR, inoltre, è una misura coerente per il rischio dato che, a differenza del VaR, soddisfa i quattro assiomi:

- *Monotonicità*: se i rendimenti di un portafoglio A sono minori di quelli del portafoglio B, la sua misura di rischio associata ad A deve essere inferiore di quella associata a B;
- *Invarianza per traslazione*: se si aggiunge un capitale privo di rischio C a un portafoglio, la sua misura di rischio deve ridursi di un importo pari a C;
- *Omogeneità*: se si aumenta la dimensione di un portafoglio in base a un fattore moltiplicativo λ , lasciandone invariata la composizione, la sua misura di rischio sarà moltiplicata di λ ;

- *Sub-additività*: la misura di rischio risultante dalla somma di due o più portafogli è inferiore alle misure di rischio relative a dei portafogli singolarmente considerati.

2.1 Trattamento dei dati

Per valutare se la metodologia di stima delle PD usata da CDP sia sufficientemente robusta è stato utilizzato un dataset estratto da uno dei principali provider presenti sul mercato. I dati estratti partono dal 1981 e giungono al 2019, distinti per varie classi di rating, senza attuare alcun tipo di restrizione geografica e di settore in modo tale da garantire una sufficiente numerosità. Nonostante i dati arrivino al 2019, per l'oggetto dell'analisi si è scelto di restringere il campione di stima con dati fino al 2006, prima della crisi dei subprime, e fino al 2010, per valutare la bontà delle previsioni rispetto a quanto realmente accaduto nei periodi successivi.

In particolare, l'estrazione ha avuto come oggetto le matrici di default, ovvero le matrici che riportano quante delle società aventi rating sono fallite, e le matrici di transizione, ovvero le matrici che riportano quante delle società sono passate a classi di rating diverse. Tali dati sono stati estrapolati avendo come orizzonte temporale di riferimento 1 anno. A partire da questi, è stato possibile ottenere la matrice delle PD cumulate, che sarà oggetto dell'analisi.

I dati grezzi, ovvero quelli estratti dal database, presentano delle problematiche in quanto la matrice delle cumulate presenta dei valori pari a 0 per rating alti e dei valori "NA" per classi di rating basse. Inoltre, nel dataset sono presenti, per alcune classi di rating, in riferimento a determinate scadenze, probabilità di default maggiori di quelle registrate nelle classi successive, non rispettando la proprietà di monotonicità.

Per ovviare ai problemi precedentemente esposti, CDP ha introdotto degli aggiustamenti di diversa natura.

Il **primo aggiustamento** è volto a considerare gli Unlikely-To-Pay, ovvero le esposizioni in cui è considerato improbabile che il debitore adempia integralmente alle sue obbligazioni creditizie senza l'escussione delle garanzie, indipendentemente dall'esistenza di importi scaduti o dal numero di giorni di arretrato (Regolamento UE, 2013). Ciò si concretizza nell'evidenziare i passaggi alle classi di rating più basse (CC, C e D) ricavati dalle matrici di transizione. Per tale motivo viene applicato, ad ogni dato registrato, un fattore moltiplicativo maggiore o uguale ad 1, che tiene conto del

rapporto delle probabilità di transizione alle classi peggiori rispetto ai soli default. Sono state apportate anche delle correzioni manuali a tali fattori, per far fronte a quelli negativi ottenuti, dove non è rispettata la condizione di monotonicità, che avrebbero amplificato tale situazione.

La matrice così ottenuta è stata sottoposta ad un **secondo aggiustamento**, che consiste in due procedure di regolarizzazione sviluppate da CDP, che hanno lo scopo di ridurre le irregolarità presenti nei dati e migliorare il livello di coerenza generale delle stime in termini di (i) andamento crescente delle probabilità di default al diminuire del rating e (ii) struttura a termine per ciascun rating coerente con i principali fatti stilizzati riportati in letteratura.

La prima riguarda i rating più alti per i quali, mediante un'interpolazione log-lineare, sono state sostituite le probabilità di default altrimenti nulle. Questa procedura prevede la trasformazione logaritmica di ciascun elemento della matrice ad esclusione di quelli oggetto dell'interpolazione. Si ottengono i dati da sostituire quindi, grazie alla pendenza e all'intercetta a partire dalle altre osservazioni della matrice. Ottenuti i valori, si attua la procedura inversa, ovvero l'esponenziale per ciascun elemento, ottenendo così la matrice delle PD con valori diversi rispetto alla precedente solo per gli elementi per cui è stata fatta l'interpolazione.

La seconda procedura di regolarizzazione riguarda i rating più bassi per i quali è stato realizzato uno scaling a potenza in modo tale che la PD ad un anno per la classe di rating D sia pari a 100%. Così facendo, a partire dalla classe di rating B- si giunge proporzionalmente al 100% della classe di rating D.

In questa fase vengono presi in considerazione i valori "NA" delle classi di rating più basse, i quali sono stati sostituiti con l'ultimo valore disponibile della PD cumulata.

Alla matrice ottenuta si attua un **terzo aggiustamento**, ovvero la procedura di Nelson-Siegel-Svensson. Quest'ultima è realizzata per far sì che - per ciascun rating - rappresentando graficamente le PD in funzione dell'orizzonte temporale, esse siano delle curve lisce e non spezzate. La procedura è di tipo esponenziale e viene applicata sulle marginali. Queste ultime sono calcolate a partire dalla cumulate, infatti, sottraendo alla probabilità cumulata del tempo t , quella precedente ($t-1$), si otterrà la PD marginale. Al termine della procedura, sarà utile tornare alle probabilità cumulate, sommando le marginali. Tale procedura sarà approfondita nel paragrafo 2.1.1.

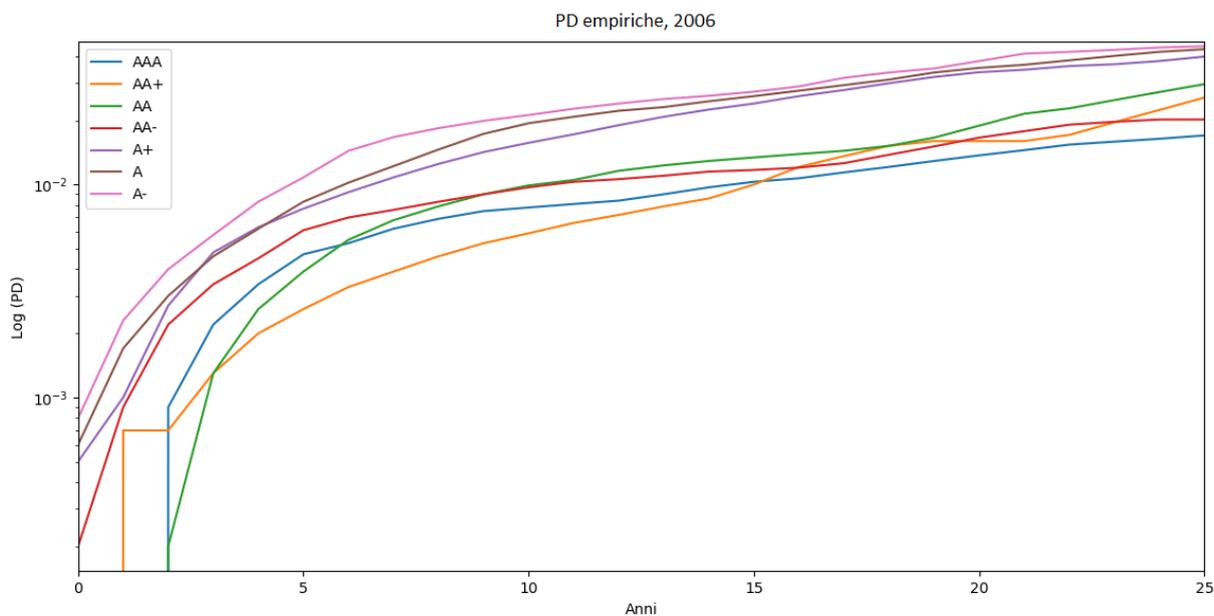
Un **quarto aggiustamento** verrebbe applicato poiché il provider dei dati utilizza una soglia per definire il default di 30 giorni mentre in Italia, in linea con le disposizioni EBA, la soglia è

fissata a 90 giorni. È opportuno evidenziare che il quarto aggiustamento non è applicato nell'analisi, in quanto viene effettuato il confronto tra le PD stimate con una definizione di default fissata a 30 giorni e gli effettivi default registrati. Inoltre, vengono rimosse le classi di rating inferiori a CCC- in quanto nel portafoglio di CDP non sono presenti società aventi un rating così basso.

Infine, si effettua un controllo per verificare le proprietà finanziariamente necessarie di monotonicità della struttura a termine delle PD, ovvero verificare se le probabilità sono crescenti al peggioramento della classe di rating e all'aumentare dell'orizzonte temporale.

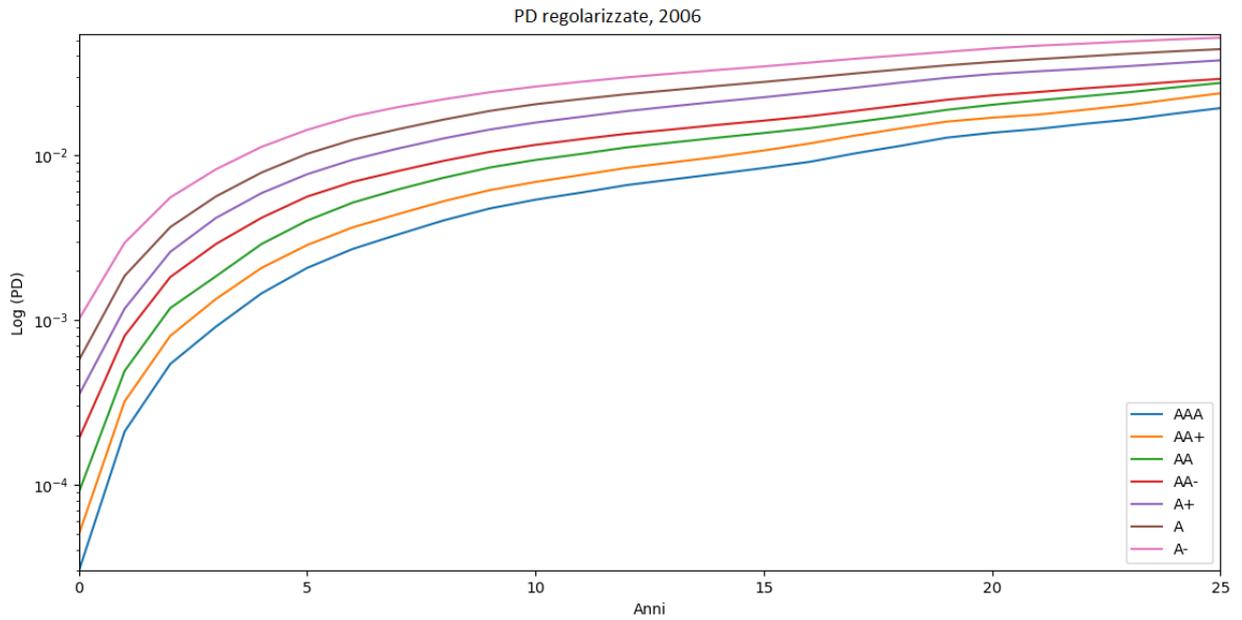
Di seguito sono riportati i risultati ottenuti dagli aggiustamenti delle PD del 2006. In particolare, si osservano le differenze tra i dati grezzi e i dati finali per le diverse classi di rating.

FIG. 2.1: PD empiriche, 2006



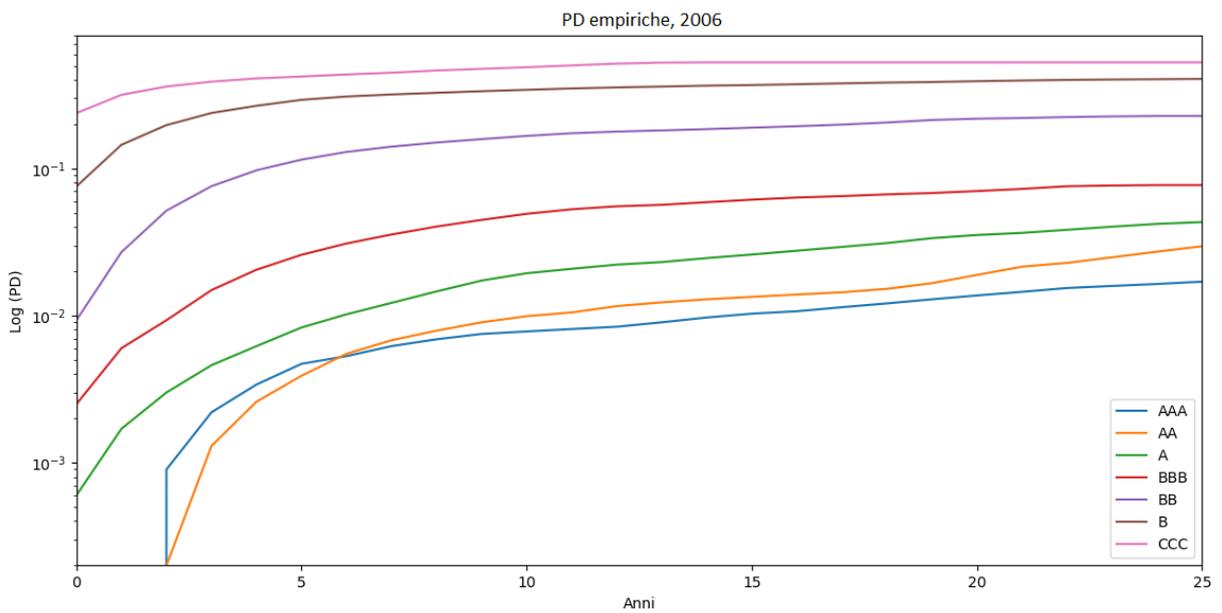
Fonte: elaborazione propria

FIG. 2.2: PD regolarizzate, 2006



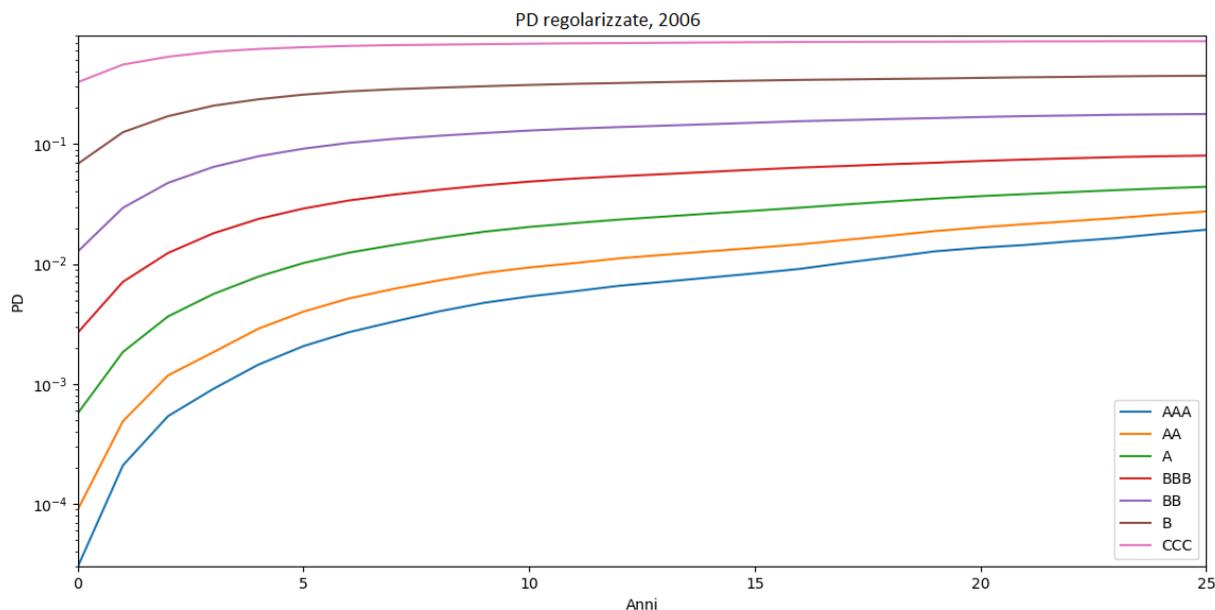
Fonte: elaborazione propria

FIG. 2.3: PD empiriche, 2006



Fonte: elaborazione propria

FIG. 2.4: PD regolarizzate, 2006



Fonte: elaborazione propria

2.1.1 Procedura di Nelson-Siegel-Svensson

Uno dei modelli utilizzati dalle banche centrali al fine di stimare la struttura a termine dei tassi di interesse è il c.d. modello di Nelson e Siegel (1987). Tali autori, infatti, hanno proposto di adattare la struttura a termine dei tassi utilizzando una funzione parametrica che sia flessibile e regolare, dimostrando come il loro modello di previsione sia in grado di stimare l'andamento della curva dei rendimenti nel tempo.

Successivamente, tale modello è stato rielaborato da Svensson (1994) al fine di aggiungere maggiore flessibilità introducendo ulteriori parametri di decadimento. Tale approccio, oltre che per la previsione della struttura a termine dei tassi di interesse, può essere utilizzato anche per effettuare stime sulla struttura a termine degli spread, nonché su quella dei tassi di default marginali. In questo caso, la curva dei tassi di default marginali sarà data da:

$$y(i) = \beta_1 + \beta_2 \left[\frac{1 - e^{-\frac{i}{\lambda_1}}}{\frac{i}{\lambda_1}} \right] + \beta_3 \left[\frac{1 - e^{-\frac{i}{\lambda_1}}}{\frac{i}{\lambda_1}} - e^{-\frac{i}{\lambda_1}} \right] + \beta_4 \left[\frac{1 - e^{-\frac{i}{\lambda_2}}}{\frac{i}{\lambda_2}} - e^{-\frac{i}{\lambda_2}} \right]$$

In cui $y(i), i = 1, \dots, n$ rappresenta il tasso di default marginale per una determinata classe di rating negli anni, sotto il rispetto di determinati vincoli, quali:

$$\beta_1 > 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$$

Dove:

β_1 : livello di lungo termine rispetto al quale oscilla il tasso.

β_2 : fattore che determina la pendenza della curva dei tassi.

β_3 e β_4 : fattori che determinano la misura del punto di massimo.

λ_1 e λ_2 : posizionamento del punto di massimo locale.

Una volta stimata la curva si procede con una minimizzazione, al fine di verificare quanto le previsioni effettuate dal modello si discostano dai dati reali. Il problema di minimizzazione può essere analizzato dalla seguente equazione:

$$\min_{\beta, \lambda} \sum (y - y^M)^2$$

Il modello di Svensson, dunque, viene utilizzato come tecnica di calibrazione mediante la quale è possibile approssimare al meglio la curva dei tassi di default marginali, rappresentandola mediante una curva che rispetti la caratteristica di monotonicità.

2.2 Validation

In questo paragrafo saranno analizzati, dal punto di vista teorico, i test presi in esame per l'analisi di backtesting, specificandone le caratteristiche ed i limiti. Fattore comune dei test è che sono rivolti alle probabilità di default through-the-cycle, oggetto dell'analisi. Tali test sono in linea con quanto indicato dal Comitato di Basilea in termini di validazione dei modelli IRB (BCBS, 2005).

2.2.1 Test Binomiale

Il test binomiale può essere utilizzato per convalidare le PD stimate nell'ambito di un modello di rating. È il test più semplice che possa essere disegnato in tale contesto, pertanto, come

meglio spiegato nel seguito, sconta alcuni limiti che possono renderne i risultati scarsamente indicativi. Esso si basa sull'assunzione di indipendenza degli eventi di default tra le varie classi di rating. Le ipotesi su cui il test lavora sono le seguenti:

H_0 : La PD della classe di rating è stimata correttamente ($PD_i \geq p_i$)

H_1 : La PD della classe di rating è sottostimata ($PD_i < p_i$)

Dato un livello di confidenza q (ad esempio 99%), l'ipotesi nulla viene rigettata se il numero di default k osservati per una certa classe di rating è maggiore al valore critico k^* , funzione di q e di PD, definito come segue:

$$k^* = \min \left\{ k \mid \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} PD^i (1 - PD)^{n-i} \leq 1 - q \right\}$$

dove n è il numero di debitori nella specifica classe di rating. Il calcolo del valore critico k^* può essere approssimato, grazie all'applicazione del teorema del limite centrale, come:

$$k^* = \Phi^{-1}(q) \sqrt{nPD(1 - PD)} + nPD$$

in cui Φ^{-1} denota la funzione inversa della distribuzione normale standard. Il risultato del test è molto semplice e intuitivo: è sufficiente confrontare il numero di default osservati con il valore critico per trarre la conclusione se la PD sia adeguatamente conservativa. Tuttavia la derivazione del valore critico si basa sul presupposto che i default siano eventi indipendenti, mentre è ben noto che i fenomeni di default mostrino un certo grado di dipendenza tra loro.

2.2.2 Test Binomiale con correlazione

Come evidenziato dalla letteratura (Tasche, 2003) e successivamente dal Comitato di Basilea è possibile modellare la correlazione tra i default tramite coefficienti di correlazione i cui valori tipici, vanno dallo 0,5% al 3% circa.

Per verificare l'influenza della cosiddetta *default correlation* su k^* si possono utilizzare due metodi. Il primo si basa un procedimento basato sul calcolo esatto con integrazione numerica, mentre il secondo si basa su un'approssimazione analitica.

In entrambi assumono che il modello sia uniperiodale. L'ipotesi sottostante è che alla fine del periodo il valore R_i delle attività del debitore i -esimo dipendono da un fattore sistematico X comune a tutti i debitori e da un fattore ε_i , specifico per il singolo debitore. Supponiamo inoltre che:

$$R_i \sim N(0,1),$$

$$X \sim N(0,1),$$

$$\varepsilon_i \sim N(0,1),$$

$$\text{Cov}(X, \varepsilon_i) = 0,$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j,$$

$$\text{Corr}(R_i, R_j) = \rho$$

dove $N(0,1)$ è la distribuzione Normale standard. Il parametro ρ è chiamato "asset correlation". Sotto queste assunzioni R_i può essere modellato come:

$$R_i = \sqrt{1 - \rho}\varepsilon_i + \sqrt{\rho}X$$

In tale contesto un debitore risulta inadempiente se il valore delle sue attività risulta essere al di sotto di una soglia γ_i alla fine del periodo, ad esempio:

$$R_i \leq \gamma_i$$

Si può definire l'indicatore Y_i come:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & R_i \leq \gamma_i \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Assumendo che tutti i debitori hanno la stessa probabilità di default, per esempio che tutti i debitori appartengono alla stessa categoria di rating e che la stessa $\gamma := \gamma_i$ è applicata a tutti i debitori, e che l'asset correlation sia la stessa per tutte le coppie di debitori, si possono ottenere le seguenti proprietà dell'indicatore di default Y_i :

$$E(Y_i) = PD = \Phi(\gamma),$$

$$\text{Var}(Y_i) = PD(1 - PD),$$

$$\text{Corr}(Y_i, Y_j) = \frac{\Phi_2(\gamma, \gamma, \rho) - PD^2}{PD(1 - PD)} =: \delta$$

dove $\Phi_2(\cdot, \cdot; \rho)$ denota la distribuzione Normale standard bivariata con correlazione ρ . La correlazione δ è la default correlation sopra citata.

Denotiamo D_n il numero osservato di insolventi tra gli n debitori in una categoria di rating. Assumiamo che la distribuzione del numero di default segua una struttura che può essere calcolata nel seguente modo:

$$P(D_n \leq k) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \Phi\left(\frac{\gamma - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}}\right)^i \left(1 - \Phi\left(\frac{\gamma - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{n-i} \phi(x) dx$$

dove $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ rappresenta la densità di una Normale standard. Questa formula per $P(D_n \leq k)$ può essere valutata con una integrazione numerica. Quindi l'esatto valore critico k^* può essere trovato invertendo questi calcoli di $P(D_n \leq k)$.

In aggiunta, si può considerare una semplice approssimazione della distribuzione di D_n mediante la distribuzione di Vasicek. Si può definire il tasso di default osservati L_n come:

$$L_n = \frac{D_n}{n}$$

Dove D_n è il numero osservato degli insolventi e n è il numero totale dei debitori nella categoria di rating. Dato che i default condizionati a una realizzazione x di X sono indipendenti, per la legge dei grandi numeri si ha che:

$$L_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(Y_i = 1|X) = \Phi\left(\frac{\gamma - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

Dove Φ denota la funzione cumulata della distribuzione normale standard. Per valori sufficientemente grandi di n si ottiene che:

$$P(D_n \leq k) = \Pr\left(L_n \leq \frac{k}{n}\right) \approx P\left(\Phi\left(\frac{\gamma - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}}\right) \leq \frac{k}{n}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) - \gamma}{\sqrt{\rho}}\right)$$

Ponendo il primo termine uguale al livello di confidenza q e risolvendo per k si può ottenere una approssimazione del valore critico k^* .

2.2.3 Hosmer-Lemeshow Test

Il test binomiale può essere appropriato nel momento in cui si desidera controllare una singola PD stimata, associata ad una classe di rating. Tuttavia, se, ad esempio, 20 o più PD vengono stimate singolarmente, è possibile che almeno una delle previsioni sarà erroneamente rigettata per i livelli di confidenza tipicamente utilizzati (e.g. 95%, quindi in un caso su 20 è atteso un superamento). Per controllare questi errori, è possibile implementare test congiunti per le diverse classi di rating. La statistica test di Hosmer-Lemeshow (2000) è spesso usata per misurare la bontà di adattamento di una regressione in cui la variabile dipendente si presenta in forma categorica. Assumiamo che vi siano N debitori che sono stati classificati in L differenti classi di rating a seconda del loro credit score. Sia, allora N_i il numero di debitori classificati per ogni singola classe di rating $i \in \{1, \dots, L\}$, da cui, ovviamente:

$$N = \sum_{i=1}^L N_i.$$

Sia, ancora, d_i il numero di debitori in default per la classe i -esima, $i \in \{1, \dots, L\}$. Allora, per i debitori nella classe i -esima, il tasso di default sarà: $p_i = d_i / N_i$. Infine, assumiamo che PD_i siano le probabilità di default per la i -esima classe di rating. Si ipotizzi che:

1. Le probabilità di default predette PD_i e i tassi di default realizzatisi p_i siano identicamente distribuiti.
2. Gli eventi di default sia tra le varie classi sia al loro interno siano indipendenti.

Sotto le ipotesi:

$$H_0 : p_i = PD_i, \quad \forall i$$

$$H_1 : p_i \neq PD_i \quad \forall i$$

Si definisce la statistica:

$$G_L = \sum_{i=1}^L \frac{(N_i PD_i - d_i)^2}{N_i PD_i (1 - PD_i)}$$

che, sotto le assunzioni 1 e 2, quando N_i tende ad infinito per classe di rating $i \in \{1, \dots, L\}$, grazie al teorema del limite centrale, convergerà in distribuzione ad una χ^2 con $L-2$ gradi di libertà. Il p-value di un test χ^2 è una misura usata per valutare l'adeguatezza della stima della probabilità di default: tanto più il valore di p è vicino allo zero, peggiore sarà la stima e viceversa. Tuttavia, se le probabilità di default stimate sono molto piccole, anche il tasso di convergenza ad una χ^2 potrebbe essere ugualmente molto piccolo. È importante notare, infine, che dal momento che il test di H-L si basa sul presupposto di indipendenza e approssimazione normale, è probabile che venga ad essere sottostimato l'errore di I tipo.

Capitolo 3

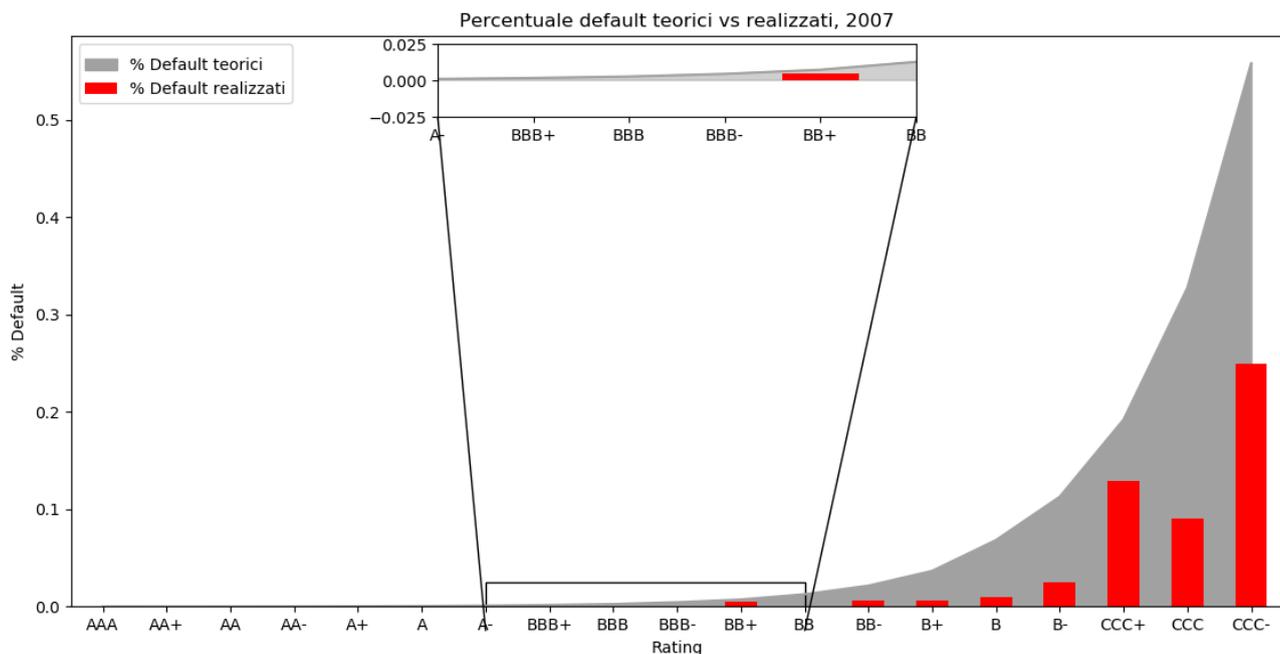
Di seguito verranno riportati i risultati dei test presentati nel capitolo precedente. L'analisi pone l'attenzione sulle PD stimate al 2006 ed al 2010, prendendo in esame due orizzonti temporali: 1 anno e 2 anni. In entrambi i casi la numerosità del campione per ciascuna classe di rating è fissa all'anno di riferimento.

3.1 Test binomiale

Come primo passo dell'analisi, è stato effettuato un test binomiale per l'ipotesi nulla che le PD non siano sottostimate; questa prima analisi non tiene conto della correlazione tra diversi debitori, pertanto non fornisce dei risultati definitivi, ma permette, assieme all'analisi grafica, di effettuare un primo confronto tra i default attesi e quelli realizzati.

Il grafico sottostante (Fig. 3.1) prende in esame i default realizzati nel 2007 e mostra come la stima dei default, effettuata considerando solo dati fino al 2006, sia tendenzialmente conservativa, in quanto i default teorici sono superiori a quelli effettivi. Il grafico mostra in termini relativi tale risultato, poiché i default realizzati sono stati calcolati come la percentuale di società appartenenti alla classe di rating andate in default nell'orizzonte temporale preso in esame.

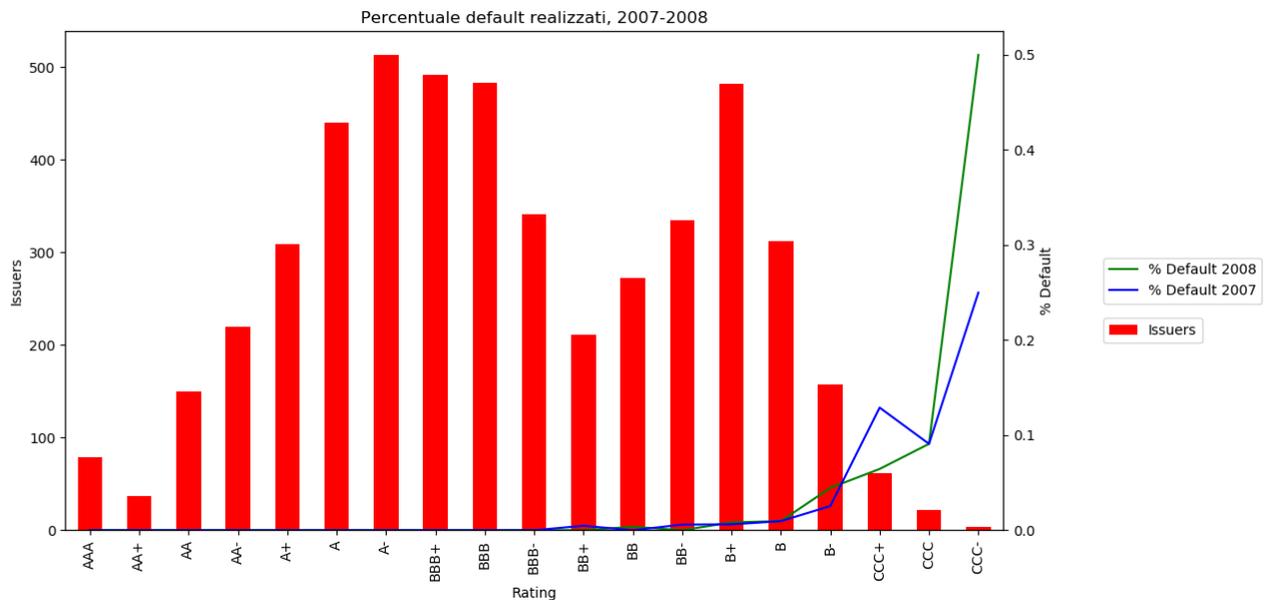
FIG. 3.1: percentuale default teorici vs realizzati, 2007



Fonte: elaborazione propria

Osservando la Figura 3.2, in cui è rappresentato un orizzonte temporale di 2 anni (2007 e 2008), è possibile osservare che per la classe CCC+ nel 2008 si sono realizzati meno default rispetto all'anno precedente, mentre per le classi CCC- c'è, invece, un sensibile aumento. Quest'ultimo fenomeno è legato al propagarsi della crisi dei mutui subprime, che inevitabilmente influenza il numero dei default a partire dall'insolvenza di Lehman Brothers. In tale ottica risulta che l'ipotesi di indipendenza dei default sia poco realistica, dato che una situazione macroeconomica di crisi ha inevitabilmente un impatto significativo su tutte le imprese e ne accentua la probabilità di non essere in grado di ripagare i propri debiti.

FIG. 3.2: percentuale default realizzati, 2007-2008



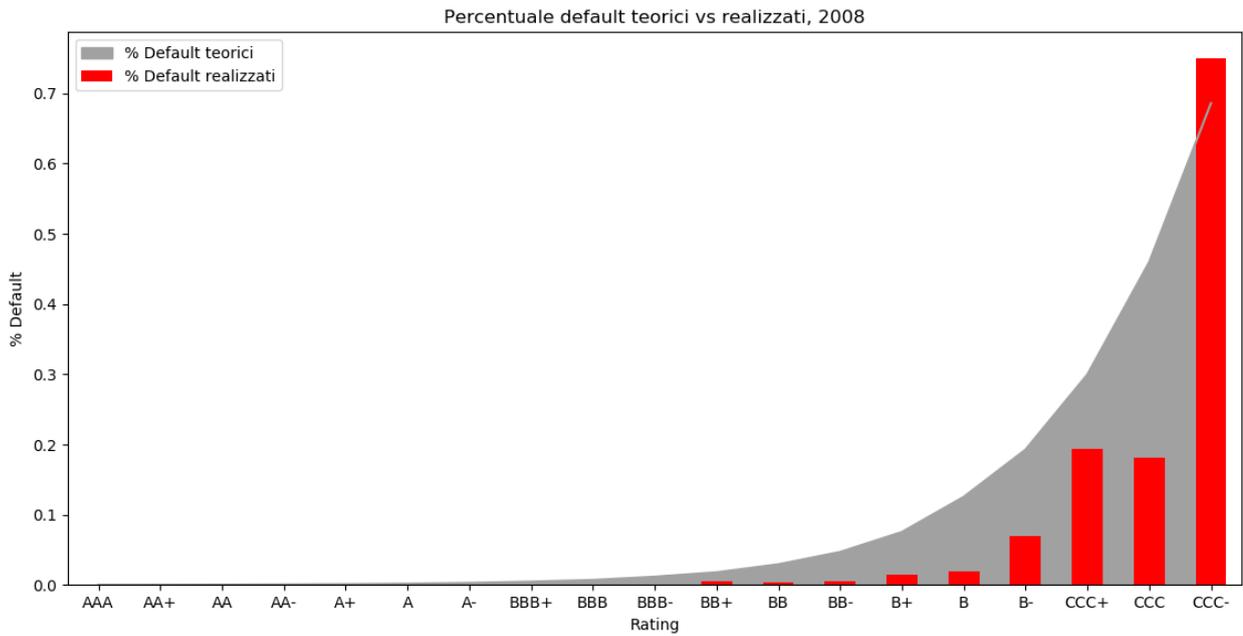
Fonte: elaborazione propria

Nonostante tale incremento, il modello di stima sembra essere sufficientemente robusto. Infatti, come mostrato dalla Figura 3.3, anche in ipotesi di correlazione nulla i default stimati risultano essere superiori a quelli effettivamente realizzati, ad eccezione della classe di rating CCC- per la quale la già menzionata condizione non si verifica.

Tale tipo di analisi è stata realizzata anche facendo riferimento all'anno 2010, i risultati sono simili a quanto visto rispetto al 2006, ma presentano alcune eccezioni.

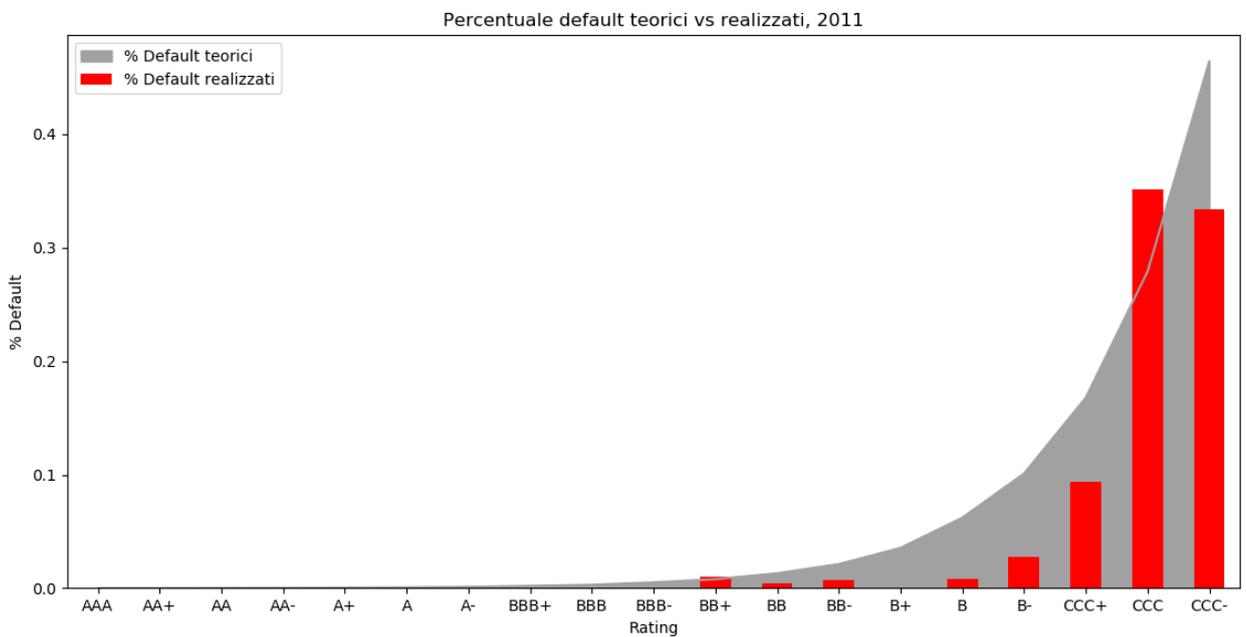
Analizzando l'orizzonte temporale ad 1 anno (Fig. 3.4), emerge che il numero di default realizzati per la classe di rating CCC supera del 7% quelli teorici. Tale circostanza non si ripete prendendo in esame un intervallo temporale di 2 anni (Fig. 3.5) in quanto la stima riesce a prevedere con correttezza i default realizzati, pur in ipotesi di assenza di correlazione.

FIG. 3.3: percentuale default teorici vs realizzati, 2008



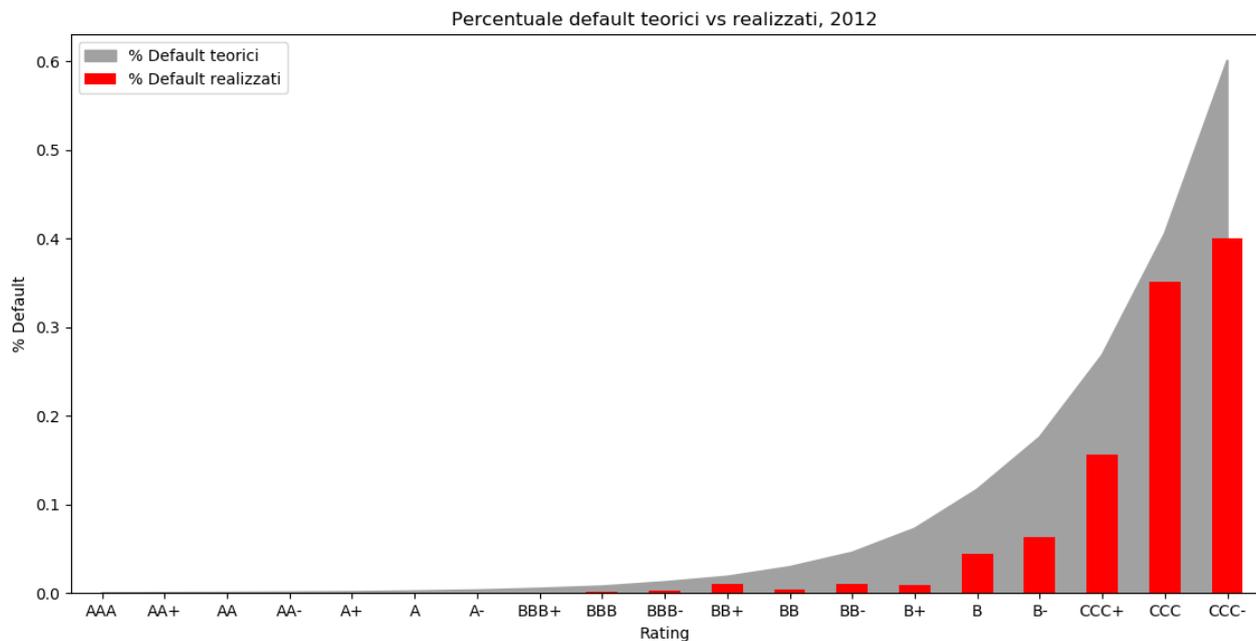
Fonte: elaborazione propria

FIG. 3.4: percentuale default teorici vs realizzati, 2011



Fonte: elaborazione propria

FIG. 3.5: percentuale default vs realizzati, 2012



Fonte: elaborazione propria

Accertata l'inesistenza del problema di sottostima delle PD delle classi di rating, in quanto il numero di default teorici è sempre superiore al numero di default realizzati, si è presa in esame la questione opposta, ovvero la sovrastima. Il valore stimato della statistica test, per un livello di significatività del 95% e del 99%, fa sì che venga rifiutata l'ipotesi nulla di non aver sovrastima delle PD in relazione ad alcune classi di rating per le quali i default realizzati sono nettamente inferiori a quelli predetti *ex-ante*. Pertanto, per queste classi di rating, le PD stimate sembrerebbero essere eccessivamente conservative in base al test binomiale in ipotesi di assenza di correlazione.

Di seguito vengono riportati i risultati completi del test solo per tali classi di rating (Tab. 3.1), mentre per le restanti si rinvia all'appendice.

Le ipotesi oggetto del test per la valutazione della presenza di sovrastima sono formulate come segue:

$$H_0 : \text{La PD della classe di rating è stimata correttamente } (PD_i \leq p_i)$$

$$H_1 : \text{La PD della classe di rating è sovrastimata } (PD_i > p_i)$$

dove PD_i rappresenta la probabilità teorica assegnata alla classe di rating i -esima e p_i rappresenta il dato empirico.

TAB. 3.1: risultati test binomiale

Anno partenza	Anno finale	Rating	P-value test	Significatività 95%	Significatività 99%
2006	2007	BB	0.031	Rifiuto H_0	Non rifiuto H_0
2006	2007	BB-	0.024	Rifiuto H_0	Non rifiuto H_0
2006	2007	B+	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2006	2007	B	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2006	2007	B-	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2006	2007	CCC	0.011	Rifiuto H_0	Non rifiuto H_0
2006	2008	BBB	0.032	Rifiuto H_0	Non rifiuto H_0
2006	2008	BBB-	0.018	Rifiuto H_0	Non rifiuto H_0
2006	2008	BB	0.003	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2006	2008	BB-	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2006	2008	B+	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2006	2008	B	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2006	2008	B-	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2006	2008	CCC+	0.042	Rifiuto H_0	Non rifiuto H_0
2006	2008	CCC	0.007	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2011	B+	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2011	B	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2011	B-	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2011	CCC+	0.029	Rifiuto H_0	Non rifiuto H_0
2010	2012	BBB-	0.050	Rifiuto H_0	Non rifiuto H_0
2010	2012	BB	0.009	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2012	BB-	0.001	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2012	B+	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2012	B	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2012	B-	0.000	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2012	CCC+	0.007	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0

Fonte: elaborazione propria

3.2 Test del chi quadro (Hosmer-Lemeshow)

Come secondo passo del backtesting, un'analisi congiunta per tutte le classi di rating, meno sensibile a errori di rifiutare erroneamente l'ipotesi nulla, è stata realizzata con il test Hosmer-Lemeshow (H-L), prendendo in considerazione i diversi anni di riferimento ed orizzonti temporali di 1 e 2 anni. Il numero di default realizzati, per ogni singola classe di rating, risulta sempre sensibilmente inferiore rispetto a quello stimato, come visto anche nel precedente test. La Figura 3.6 nello specifico mostra quanto calcolato in riferimento al 2006 con un orizzonte temporale di 1 anno.

Il risultato appare analogo per gli altri anni. Infine, vengono riportati i risultati dei test (Tab. 3.2), indicando la statistica test e il valore critico estratto dalla distribuzione Chi-quadro, attraverso i quali è possibile giungere ad una decisione circa l'ipotesi nulla di corretta stima delle PD.

Si ricorda che, il test presenta tali ipotesi:

H_0 : Le PD delle classi di rating sono stimate correttamente ($p_i = PD_i, \forall i$)

H_1 : Le PD delle classi di rating non sono stimate correttamente ($p_i \neq PD_i \forall i$)

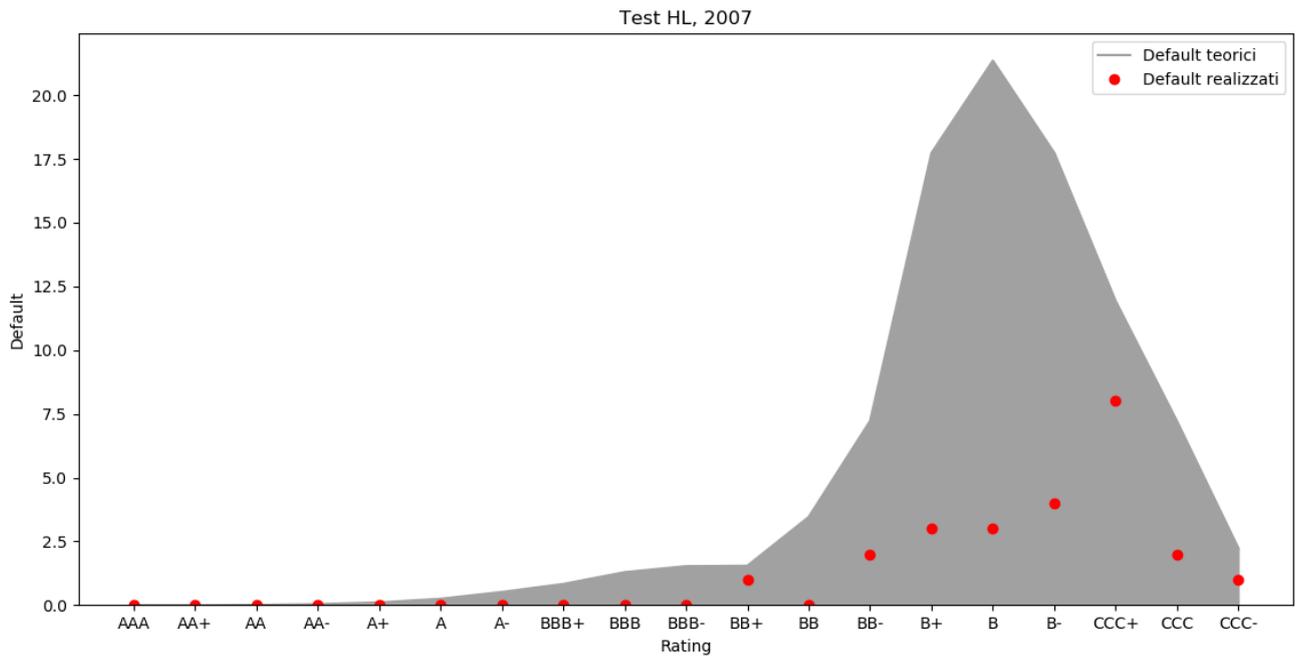
Mentre la statistica-test è calcolata come:

$$C_L = \sum_{i=1}^L \frac{(N_i PD_i - d_i)^2}{N_i PD_i (1 - PD_i)}$$

In tutti i casi, il test vede rifiutare l'ipotesi nulla, in conseguenza di un livello di conservatività del modello che appare superiore al necessario, almeno in assenza di ipotesi di correlazione tra i default di diversi debitori.

Tale risultato non risulterebbe problematico nell'ottica di un'autorità di vigilanza, in quanto in una situazione del genere un'istituzione finanziaria si troverebbe a detenere un capitale di vigilanza superiore a quello strettamente necessario. In ottica gestionale, tuttavia, un modello più conservativo del necessario più risultare meno desiderabile, sia per la minore efficienza nell'utilizzo del patrimonio, sia per la minore competitività che potrebbe determinare se utilizzato a fini di pricing dei finanziamenti.

FIG. 3.6: test H-L, 2007



Fonte: elaborazione propria

TAB. 3.2: risultati test H-L

Anno Partenza	Anno Finale	Valore critico	Statistica Test	Significatività 95%	Significatività 99%
2006	2007	27.58	62.52	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2006	2008	33.40	117.12	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2011	27.58	60.94	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0
2010	2012	33.40	94.20	Rifiuto H_0	Rifiuto H_0

Fonte: elaborazione propria

3.3 Test binomiale con correlazione

I test finora presi in considerazione prevedono l'ipotesi di default indipendenti tra loro. Tale ipotesi, come già anticipato, risulta essere poco realistica poiché sarebbe difficile affermare che, specie in un contesto di crisi, non vi sia un certo livello di correlazione positiva tra le

insolvenze. Portando il ragionamento alle estreme conseguenze, se i default non fossero correlati tra loro, un'istituzione finanziaria con un portafoglio molto granulare e diversificato non avrebbe bisogno di detenere capitale per il rischio di credito, limitandosi ad effettuare accantonamenti a fronte della perdita attesa.

Tale aspetto è stato analizzato in letteratura (Tasche, 2003 e BCBS, 2005) e rappresenta un elemento importante da considerare per un backtesting più realistico. Per questo motivo, si è deciso di implementare il test binomiale con correlazione, in linea con le indicazioni del BCBS, in termini di validazione dei modelli IRB. Tale analisi è stata realizzata prendendo in considerazione diversi livelli di asset correlation e in riferimento ad un orizzonte temporale di 1 anno e di 2 anni, con un livello di confidenza del 99%. La metodologia di stima del k^* utilizzata prevede il calcolo esatto con integrazione numerica in assenza di correlazione (1), mentre è stata utilizzata l'approssimazione analitica, in presenza di quest'ultima (2).

Si ricorda che, come definito nel capitolo 2, k^* è estratto dalle seguenti relazioni:

$$k^* = \min \left\{ k \mid \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} PD^i (1 - PD)^{n-i} \leq 1 - q \right\} \quad (1)$$

$$P(D_n \leq k) = \Pr \left(L_n \leq \frac{k}{n} \right) \approx P \left(\Phi \left(\frac{\gamma - \sqrt{\rho} X}{\sqrt{1-\rho}} \right) \leq \frac{k}{n} \right) = \Phi \left(\frac{\sqrt{1-\rho} \Phi^{-1} \left(\frac{k}{n} \right) - \gamma}{\sqrt{\rho}} \right) \quad (2)$$

Tale per cui:

$$k^* = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(P(D < K))^* \sqrt{\rho} + \gamma}{\sqrt{1-\rho}} \right) * n \quad (3)$$

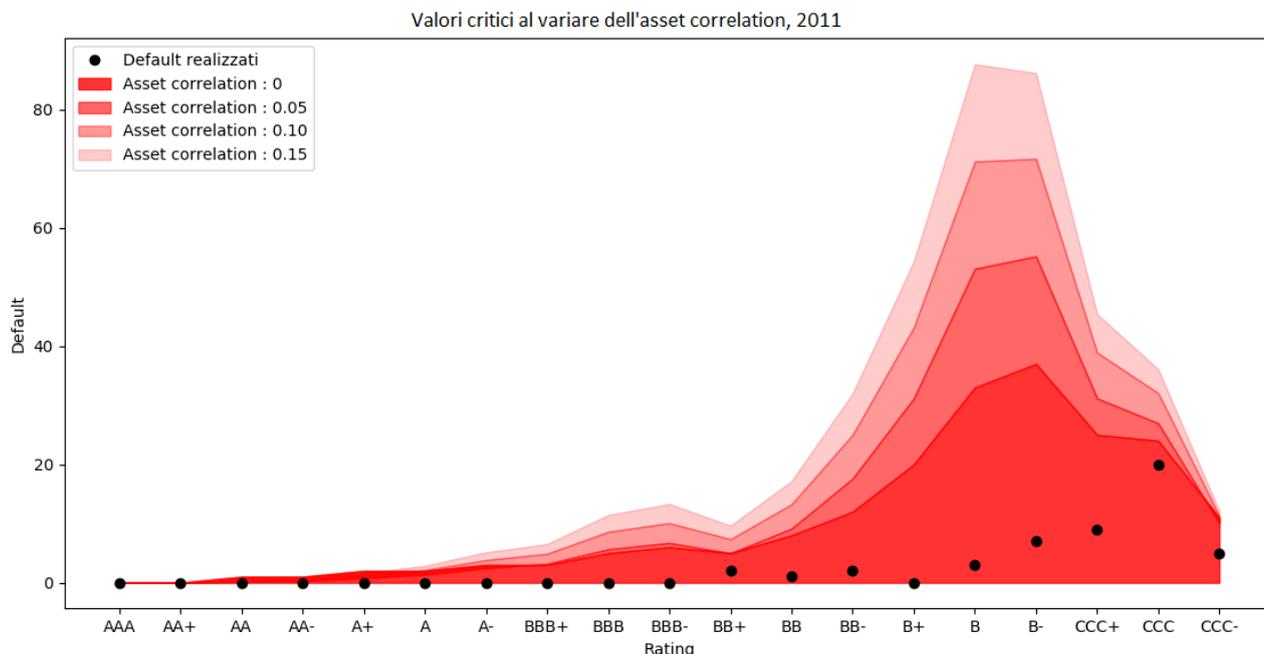
Di seguito vengono riportati graficamente i risultati relativi al 2011, ma è possibile giungere a conclusioni analoghe per gli altri anni in esame.

Lo scopo di tale analisi è quello di individuare il numero massimo di default accettabili, affinché la PD non sottostimi il reale livello di default. Pertanto, nel test binomiale è stata inserita la correlazione che potrebbe essere utile a giustificare un numero di default superiori rispetto a quelli ottenuti da una prima analisi.

È possibile osservare nella figura sottostante (Fig. 3.7) riferita al 2011, come il numero di default attesi cresca all'aumentare dell'asset correlation. Nella pratica, mentre il regolatore prevede un livello di asset correlation che varia tra il 12% e il 24%, per prevedere un numero

abbastanza elevato di default tale da risultare adeguato alle classi di rating in esame è sufficiente un livello di asset correlation dello 0%.

FIG. 3.7: test binomiale con correlazione, 2011



Fonte: elaborazione propria

Come visto nei paragrafi precedenti, nel caso del modello oggetto di analisi, già il test binomiale permette sostanzialmente di escludere una tendenza alla sottostima delle probabilità di default, mentre sembra esserci, in ipotesi di correlazione nulla, una certa evidenza di sovrastima delle stesse, pertanto, analogamente a quanto fatto in precedenza, è stata implementata la metodologia proposta dal Comitato di Basilea per definire il k^* minimo, ovvero il quantile tale per cui nella formula (3) la $P(D_n \leq k)$ non sia del 99%, ma dell'1%. Ciò significa che, se in precedenza si era calcolato il numero massimo di default da prevedere inserendo un determinato livello di asset correlation, ora si pone l'attenzione sul livello minimo di default, dato il livello di asset correlation.

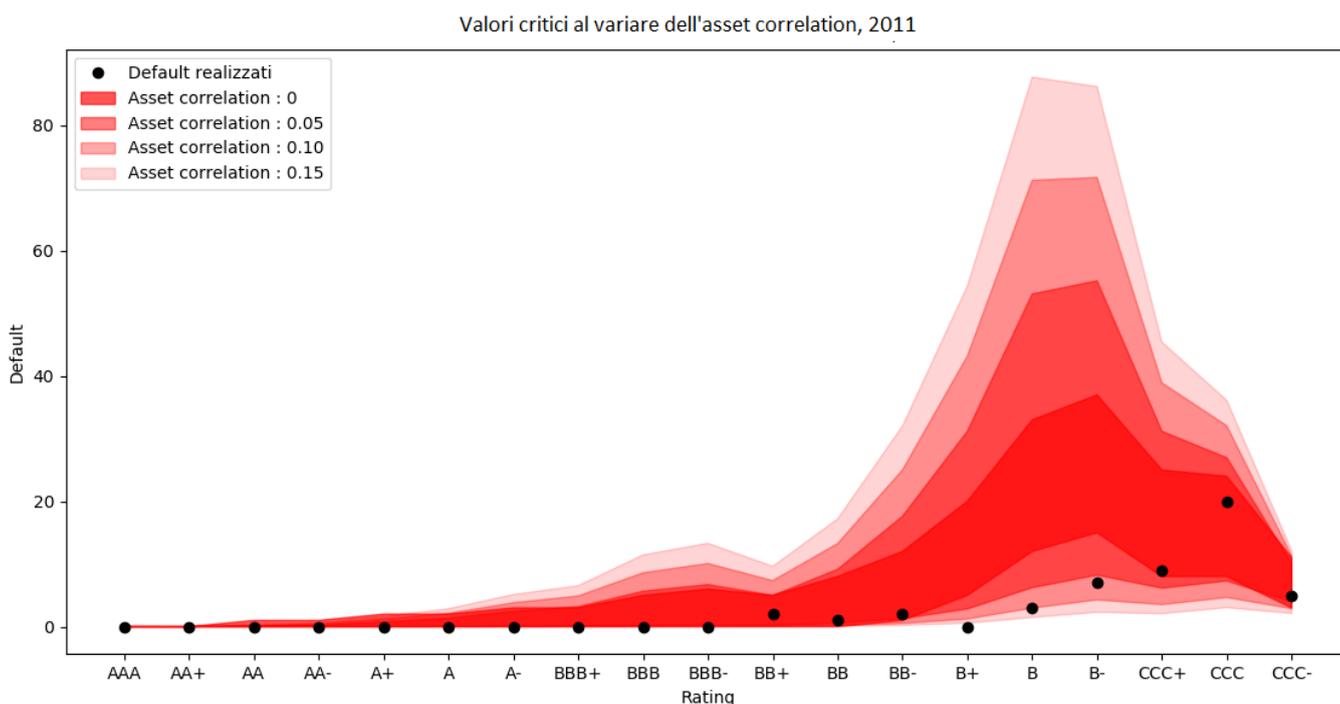
Per effettuare il confronto con quanto visto finora, sarà preso in esame anche in questo caso lo scenario del 2011. Tuttavia, risultati simili si ottengono anche per gli altri anni oggetto di analisi.

L'area più scura rappresenta l'intervallo nel quale la PD stimata non sovrastima e non sottostima il livello di default. L'inserimento di k^* minimo, introduce il livello di default al di sotto del quale, le PD sovrastimano il tasso di default realizzato. Quindi, qualora i default realizzati risultassero inferiori a k^* minimo, le PD sarebbero eccessivamente conservative. Anche in questo caso, la presenza dell'asset correlation contribuisce ad allargare l'intervallo all'interno del quale la stima può ritenersi corretta. A differenza di quanto visto in precedenza, all'aumentare dell'asset correlation, il livello k^* minimo si riduce.

Ponendo l'attenzione quindi, sui default che risultano inferiori a quanto stimato, nel caso specifico del 2011, in assenza di correlazione la PD sovrastima i default per la classe di rating B+, B e B-.

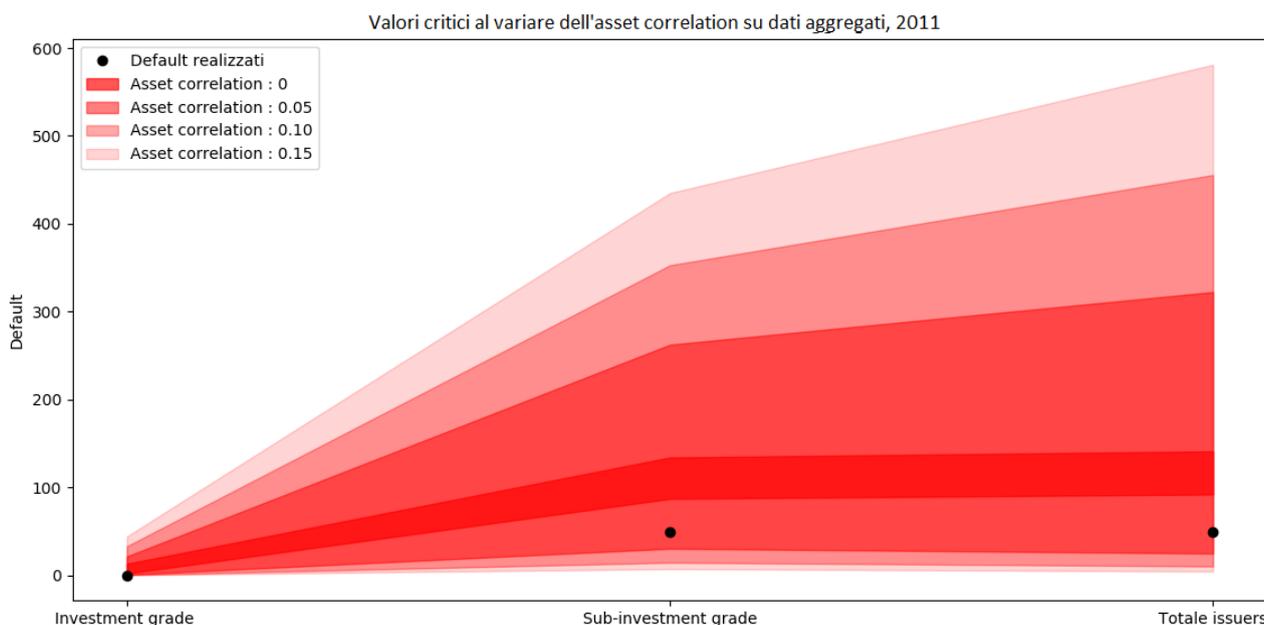
In particolare, la classe di rating B+ presenta 333 issuers e 0 default nell'orizzonte temporale in esame e la stima in assenza di asset correlation prevede dai 5 ai 20 fallimenti. È necessario un livello di asset correlation del 15% per stimare l'intervallo all'interno del quale è contenuto l'effettivo numero di default realizzati e quindi concludere che la PD non sovrastimi il livello di default.

FIG. 3.8: test binomiale con correlazione, 2011 (fonte: elaborazione propria)



Per meglio apprezzare gli effetti della numerosità del campione sui risultati, si è deciso di aggregare le classi di rating, distinguendo le classi in *investment grade* e *sub-investment grade* rispetto al totale. L'obiettivo è quello di ottenere delle classi di maggior numerosità dove è possibile osservare un numero considerevole di default. Anche in questo caso, com'è possibile osservare dal grafico seguente (Fig. 3.9), in ipotesi di assenza di correlazione il modello di stima appare più conservativo del necessario, tuttavia è sufficiente un livello di asset correlation contenuto, pari al 5% per inglobare il dato realizzato nel range atteso.

FIG. 3.9: test binomiale con correlazione con rating aggregati, 2011



Fonte: elaborazione propria

Come affermato da Tasche (2003), si può notare che l'assunzione di indipendenza all'interno del test binomiale non risulta essere robusta per alti percentili. Infatti, anche piccole violazioni di questa assunzione portano a significativi cambiamenti in k^* . Dato che nella realtà la correlazione non è nulla, ciò significa che non sono improbabili grandi deviazioni della PD stimata dal tasso di default osservato. L'esistenza della correzione tra i default rende impossibile anche per le banche con un grande numero di debitori stimare una PD che sia vicina al tasso di default osservato con probabilità prossima a uno. La ragione di ciò è che la legge dei grandi numeri non funziona a causa dell'esistenza della correlazione. La conseguenza di questo fenomeno statistico è che la validazione di una PD stimata non è la

validazione della correttezza di un singolo numero, ma la validazione del valore atteso di una distribuzione.

Tuttavia, poiché i valori critici dei test sulla PD che incorporano la correlazione tendono ad essere molto più alti dei valori critici del test binomiale (basato sull'indipendenza), quest'ultimo test sarà, infatti, conservativo nel senso di rigettare troppo facilmente l'ipotesi nulla H_0 . In altre parole, quando il test binomiale viene applicato in un contesto di correlazione, la dimensione reale dell'errore di I tipo (ovvero rifiutare H_0 erroneamente) sarà superiore a quella indicata dal livello del test.

Conclusioni

In conclusione, il lavoro svolto è riuscito nell'intento di realizzare un'analisi di backtesting nell'ambito corporate, caratterizzato da livelli di default comunque contenuti rispetto ad altri segmenti (e.g. retail, credito al consumo, etc.), al fine di valutare se la metodologia di stima usata da CDP per la valutazione della probabilità di default, anche quando applicata ai dati precrisi, si dimostri robusta rispetto ai dati realizzati successivamente. L'analisi non si è basata sul solo contesto del 2007-2008, ma si è preso in considerazione anche il periodo 2011-2012.

È stato necessario estrarre i dati da uno dei maggiori provider di mercato in quanto tra i soggetti finanziati da CDP non sono presenti eventi di default con una numerosità tale da poter condurre alcuna analisi. Ai dati grezzi estratti è stato necessario applicare dei fattori di regolarizzazione, secondo le usuali pratiche di mercato e di analisi statistica.

Per la verifica della robustezza i primi test presi in esame sono stati il test binomiale ed il test chi-quadro (Hosmer-Lemeshow). Questi presentano come ipotesi di base l'indipendenza dei default, ma rispettivamente, permettono di effettuare una valutazione sulle singole PD o sulle PD nel loro complesso. Tali test non consentono di trarre delle conclusioni definitive in quanto l'ipotesi di indipendenza sembra irrealistica in un contesto come quello della crisi dei mutui subprime e del debito sovrano. I risultati ottenuti fino a questo momento sembrano suggerire che il modello di stima utilizzato sia conservativo.

Per superare i limiti dei test precedenti, è stato realizzato il test binomiale con correlazione, che permette di ottenere dei risultati che tengano conto del variare dell'asset correlation. Il primo passo è stato quello di definire gli intervalli per i quali l'asset correlation fosse in grado di spiegare un numero di default maggiori di quanto stimato. Il secondo, è stato quello di valutare il livello minimo di default da osservare per poter concludere che il modello non sottostima il numero di default realizzati. Inoltre, per osservare una maggiore numerosità di default si è deciso di aggregare gli issuers in investment e sub-investment grade.

Ciò che è emerso è che, se ad una prima analisi le stime potevano sembrare eccessivamente elevate, già con l'inserimento di un livello di asset correlation contenuto la stima risulta essere adeguata. Infatti, come analizzato già in letteratura, risulta realistico ipotizzare l'esistenza di un certo livello di correlazione, soprattutto in uno scenario di crisi. Tale correlazione

comporta considerevoli scostamenti dalla stima in sua assenza ed è per questo necessario importante in considerazione nel backtesting.

Bibliografia

BCBS (2005), Studies on the Validation of Internal Rating Systems, *Working Paper*.

Gilli M., Große S. e Schumann E. (2010), Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model, *Working Paper*.

Regolamento UE n. 575/2013, Art. 178, paragrafo 3 per gli elementi da considerare come indicativi dell'inadempienza probabile.

Resti A. e Sironi A. (2008). Rischio e valore nelle banche: misura, regolamentazione, gestione, *Egea*, Milano.

Tasche D. (2003), A traffic lights approach to PD validation, *Working Paper*.

Tasche D. (2008), Validation of internal rating systems and PD estimates, *Working Paper*.

Appendice

Test binomiale

Anno partenza	Anno finale	Rating	Issuers	PD	Default teorici	Default realizzati	P-value	Significatività 95%	Significatività 99%
2006	2007	AAA	79	0.000	0.00	0	1.00	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	AA+	37	0.000	0.00	0	1.00	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	AA	150	0.000	0.01	0	0.99	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	AA-	220	0.000	0.04	0	0.96	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	A+	309	0.000	0.11	0	0.90	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	A	440	0.001	0.25	0	0.78	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	A-	513	0.001	0.52	0	0.60	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	BBB+	492	0.002	0.83	0	0.44	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	BBB	483	0.003	1.29	0	0.27	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	BBB-	341	0.004	1.53	0	0.22	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	BB+	211	0.007	1.55	1	0.54	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	BB	272	0.013	3.46	0	0.03	Rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	BB-	335	0.022	7.22	2	0.02	Rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	B+	482	0.037	17.73	3	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2006	2007	B	312	0.068	21.35	3	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2006	2007	B-	157	0.113	17.74	4	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2006	2007	CCC+	62	0.192	11.92	8	0.13	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	CCC	22	0.328	7.21	2	0.01	Rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2007	CCC-	4	0.558	2.23	1	0.23	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	AAA	79	0.000	0.02	0	0.98	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	AA+	37	0.000	0.01	0	0.99	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	AA	150	0.000	0.07	0	0.93	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	AA-	220	0.001	0.18	0	0.84	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	A+	309	0.001	0.36	0	0.70	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	A	440	0.002	0.81	0	0.44	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	A-	513	0.003	1.51	0	0.22	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	BBB+	492	0.005	2.34	0	0.10	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	BBB	483	0.007	3.43	0	0.03	Rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	BBB-	341	0.012	4.01	0	0.02	Rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	BB+	211	0.018	3.81	1	0.10	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	BB	272	0.029	8.00	1	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2006	2008	BB-	335	0.047	15.76	2	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2006	2008	B+	482	0.076	36.40	7	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2006	2008	B	312	0.126	39.17	6	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2006	2008	B-	157	0.193	30.27	11	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2006	2008	CCC+	62	0.300	18.58	12	0.04	Rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2006	2008	CCC	22	0.460	10.11	4	0.01	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀

2006	2008	CCC-	4	0.686	2.74	3	0.78	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	AAA	61	0.000	0.01	0	0.99	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	AA+	24	0.000	0.00	0	1.00	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	AA	136	0.000	0.03	0	0.97	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	AA-	197	0.000	0.06	0	0.94	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	A+	337	0.001	0.17	0	0.84	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	A	446	0.001	0.31	0	0.73	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	A-	498	0.001	0.60	0	0.55	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	BBB+	409	0.002	0.82	0	0.44	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	BBB	507	0.003	1.52	0	0.22	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	BBB-	378	0.005	1.93	0	0.14	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	BB+	191	0.008	1.51	2	0.81	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	BB	227	0.013	2.97	1	0.20	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	BB-	290	0.021	6.15	2	0.05	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	B+	333	0.036	11.82	0	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2010	2011	B	358	0.062	22.23	3	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2010	2011	B-	252	0.101	25.45	7	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2010	2011	CCC+	96	0.168	16.11	9	0.03	Rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	CCC	57	0.279	15.90	20	0.91	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2011	CCC-	15	0.464	6.96	5	0.23	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	AAA	61	0.000	0.02	0	0.98	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	AA+	24	0.001	0.01	0	0.99	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	AA	136	0.001	0.10	0	0.91	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	AA-	197	0.001	0.20	0	0.82	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	A+	337	0.001	0.47	0	0.62	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	A	446	0.002	0.98	0	0.37	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	A-	498	0.003	1.64	0	0.19	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	BBB+	409	0.005	2.13	0	0.12	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	BBB	507	0.008	3.90	1	0.10	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	BBB-	378	0.013	4.73	1	0.05	Rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	BB+	191	0.019	3.57	2	0.31	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	BB	227	0.030	6.70	1	0.01	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2010	2012	BB-	290	0.046	13.28	3	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2010	2012	B+	333	0.073	24.24	3	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2010	2012	B	358	0.117	41.85	16	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2010	2012	B-	252	0.176	44.30	16	0.00	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2010	2012	CCC+	96	0.268	25.77	15	0.01	Rifiuto H ₀	Rifiuto H ₀
2010	2012	CCC	57	0.405	23.10	20	0.24	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀
2010	2012	CCC-	15	0.600	9.00	6	0.09	Non rifiuto H ₀	Non rifiuto H ₀

Test binomiale con correlazione

Anno partenza	Anno finale	Rating	Issuers	PD	Asset correlation	Default realizzati	K 1%	K 99%
2006	2007	AAA	79	0.00	0	0	0.000	0.000
2006	2007	AAA	79	0.00	0.05	0	0.000	0.013
2006	2007	AAA	79	0.00	0.1	0	0.000	0.022
2006	2007	AAA	79	0.00	0.15	0	0.000	0.029
2006	2007	AAA	79	0.00	0.2	0	0.000	0.035
2006	2007	AA+	37	0.00	0	0	0.000	0.000
2006	2007	AA+	37	0.00	0.05	0	0.000	0.010
2006	2007	AA+	37	0.00	0.1	0	0.000	0.016
2006	2007	AA+	37	0.00	0.15	0	0.000	0.022
2006	2007	AA+	37	0.00	0.2	0	0.000	0.027
2006	2007	AA	150	0.00	0	0	0.000	1.000
2006	2007	AA	150	0.00	0.05	0	0.001	0.070
2006	2007	AA	150	0.00	0.1	0	0.000	0.113
2006	2007	AA	150	0.00	0.15	0	0.000	0.152
2006	2007	AA	150	0.00	0.2	0	0.000	0.187
2006	2007	AA-	220	0.00	0	0	0.000	1.000
2006	2007	AA-	220	0.00	0.05	0	0.003	0.204
2006	2007	AA-	220	0.00	0.1	0	0.001	0.327
2006	2007	AA-	220	0.00	0.15	0	0.000	0.441
2006	2007	AA-	220	0.00	0.2	0	0.000	0.545
2006	2007	A+	309	0.00	0	0	0.000	1.000
2006	2007	A+	309	0.00	0.05	0	0.009	0.501
2006	2007	A+	309	0.00	0.1	0	0.002	0.796
2006	2007	A+	309	0.00	0.15	0	0.001	1.074
2006	2007	A+	309	0.00	0.2	0	0.000	1.333
2006	2007	A	440	0.00	0	0	0.000	2.000
2006	2007	A	440	0.00	0.05	0	0.024	1.109
2006	2007	A	440	0.00	0.1	0	0.006	1.750
2006	2007	A	440	0.00	0.15	0	0.001	2.359
2006	2007	A	440	0.00	0.2	0	0.000	2.937
2006	2007	A-	513	0.00	0	0	0.000	3.000
2006	2007	A-	513	0.00	0.05	0	0.055	2.166
2006	2007	A-	513	0.00	0.1	0	0.014	3.381
2006	2007	A-	513	0.00	0.15	0	0.004	4.546
2006	2007	A-	513	0.00	0.2	0	0.001	5.671
2006	2007	BBB+	492	0.00	0	0	0.000	4.000
2006	2007	BBB+	492	0.00	0.05	0	0.098	3.293
2006	2007	BBB+	492	0.00	0.1	0	0.027	5.085
2006	2007	BBB+	492	0.00	0.15	0	0.008	6.810
2006	2007	BBB+	492	0.00	0.2	0	0.002	8.498
2006	2007	BBB	483	0.00	0	0	0.000	5.000
2006	2007	BBB	483	0.00	0.05	0	0.168	4.871

2006	2007	BBB	483	0.00	0.1	0	0.050	7.437
2006	2007	BBB	483	0.00	0.15	0	0.015	9.914
2006	2007	BBB	483	0.00	0.2	0	0.005	12.357
2006	2007	BBB-	341	0.00	0	0	0.000	5.000
2006	2007	BBB-	341	0.00	0.05	0	0.223	5.421
2006	2007	BBB-	341	0.00	0.1	0	0.071	8.158
2006	2007	BBB-	341	0.00	0.15	0	0.024	10.801
2006	2007	BBB-	341	0.00	0.2	0	0.008	13.425
2006	2007	BB+	211	0.01	0	1	0.000	5.000
2006	2007	BB+	211	0.01	0.05	1	0.251	5.148
2006	2007	BB+	211	0.01	0.1	1	0.086	7.627
2006	2007	BB+	211	0.01	0.15	1	0.031	10.014
2006	2007	BB+	211	0.01	0.2	1	0.010	12.391
2006	2007	BB	272	0.01	0	0	0.000	8.000
2006	2007	BB	272	0.01	0.05	0	0.640	10.686
2006	2007	BB	272	0.01	0.1	0	0.237	15.516
2006	2007	BB	272	0.01	0.15	0	0.091	20.131
2006	2007	BB	272	0.01	0.2	0	0.034	24.724
2006	2007	BB-	335	0.02	0	2	2.000	14.000
2006	2007	BB-	335	0.02	0.05	2	1.522	20.640
2006	2007	BB-	335	0.02	0.1	2	0.610	29.302
2006	2007	BB-	335	0.02	0.15	2	0.254	37.486
2006	2007	BB-	335	0.02	0.2	2	0.103	45.587
2006	2007	B+	482	0.04	0	3	9.000	28.000
2006	2007	B+	482	0.04	0.05	3	4.292	46.483
2006	2007	B+	482	0.04	0.1	3	1.874	64.276
2006	2007	B+	482	0.04	0.15	3	0.849	80.800
2006	2007	B+	482	0.04	0.2	3	0.375	96.975
2006	2007	B	312	0.07	0	3	12.000	32.000
2006	2007	B	312	0.07	0.05	3	6.146	50.061
2006	2007	B	312	0.07	0.1	3	2.980	66.762
2006	2007	B	312	0.07	0.15	3	1.493	81.831
2006	2007	B	312	0.07	0.2	3	0.734	96.255
2006	2007	B-	157	0.11	0	4	9.000	27.000
2006	2007	B-	157	0.11	0.05	4	5.945	37.566
2006	2007	B-	157	0.11	0.1	4	3.155	48.389
2006	2007	B-	157	0.11	0.15	4	1.726	57.837
2006	2007	B-	157	0.11	0.2	4	0.929	66.632
2006	2007	CCC+	62	0.19	0	8	5.000	20.000
2006	2007	CCC+	62	0.19	0.05	8	4.771	22.320
2006	2007	CCC+	62	0.19	0.1	8	2.810	27.520
2006	2007	CCC+	62	0.19	0.15	8	1.699	31.843
2006	2007	CCC+	62	0.19	0.2	8	1.015	35.695
2006	2007	CCC	22	0.33	0	2	2.000	12.000
2006	2007	CCC	22	0.33	0.05	2	3.536	11.665

2006	2007	CCC	22	0.33	0.1	2	2.341	13.637
2006	2007	CCC	22	0.33	0.15	2	1.583	15.160
2006	2007	CCC	22	0.33	0.2	2	1.061	16.428
2006	2007	CCC-	4	0.56	0	1	0.000	3.000
2006	2007	CCC-	4	0.56	0.05	1	1.404	3.013
2006	2007	CCC-	4	0.56	0.1	1	1.070	3.296
2006	2007	CCC-	4	0.56	0.15	1	0.827	3.489
2006	2007	CCC-	4	0.56	0.2	1	0.636	3.631
2006	2008	AAA	79	0.00	0	0	0.000	1.000
2006	2008	AAA	79	0.00	0.05	0	0.001	0.080
2006	2008	AAA	79	0.00	0.1	0	0.000	0.129
2006	2008	AAA	79	0.00	0.15	0	0.000	0.174
2006	2008	AAA	79	0.00	0.2	0	0.000	0.214
2006	2008	AA+	37	0.00	0	0	0.000	1.000
2006	2008	AA+	37	0.00	0.05	0	0.001	0.055
2006	2008	AA+	37	0.00	0.1	0	0.000	0.088
2006	2008	AA+	37	0.00	0.15	0	0.000	0.119
2006	2008	AA+	37	0.00	0.2	0	0.000	0.147
2006	2008	AA	150	0.00	0	0	0.000	1.000
2006	2008	AA	150	0.00	0.05	0	0.007	0.330
2006	2008	AA	150	0.00	0.1	0	0.002	0.522
2006	2008	AA	150	0.00	0.15	0	0.000	0.703
2006	2008	AA	150	0.00	0.2	0	0.000	0.875
2006	2008	AA-	220	0.00	0	0	0.000	2.000
2006	2008	AA-	220	0.00	0.05	0	0.018	0.753
2006	2008	AA-	220	0.00	0.1	0	0.005	1.181
2006	2008	AA-	220	0.00	0.15	0	0.001	1.590
2006	2008	AA-	220	0.00	0.2	0	0.000	1.982
2006	2008	A+	309	0.00	0	0	0.000	2.000
2006	2008	A+	309	0.00	0.05	0	0.040	1.489
2006	2008	A+	309	0.00	0.1	0	0.010	2.317
2006	2008	A+	309	0.00	0.15	0	0.003	3.112
2006	2008	A+	309	0.00	0.2	0	0.001	3.883
2006	2008	A	440	0.00	0	0	0.000	3.000
2006	2008	A	440	0.00	0.05	0	0.098	3.192
2006	2008	A	440	0.00	0.1	0	0.028	4.919
2006	2008	A	440	0.00	0.15	0	0.008	6.583
2006	2008	A	440	0.00	0.2	0	0.002	8.213
2006	2008	A-	513	0.00	0	0	0.000	5.000
2006	2008	A-	513	0.00	0.05	0	0.200	5.615
2006	2008	A-	513	0.00	0.1	0	0.060	8.552
2006	2008	A-	513	0.00	0.15	0	0.019	11.388
2006	2008	A-	513	0.00	0.2	0	0.006	14.190
2006	2008	BBB+	492	0.00	0	0	0.000	6.000
2006	2008	BBB+	492	0.00	0.05	0	0.344	8.217

2006	2008	BBB+	492	0.00	0.1	0	0.111	12.346
2006	2008	BBB+	492	0.00	0.15	0	0.037	16.331
2006	2008	BBB+	492	0.00	0.2	0	0.012	20.290
2006	2008	BBB	483	0.01	0	0	0.000	8.000
2006	2008	BBB	483	0.01	0.05	0	0.554	11.476
2006	2008	BBB	483	0.01	0.1	0	0.188	17.021
2006	2008	BBB	483	0.01	0.15	0	0.067	22.358
2006	2008	BBB	483	0.01	0.2	0	0.023	27.675
2006	2008	BBB-	341	0.01	0	0	0.000	9.000
2006	2008	BBB-	341	0.01	0.05	0	0.727	12.514
2006	2008	BBB-	341	0.01	0.1	0	0.266	18.226
2006	2008	BBB-	341	0.01	0.15	0	0.101	23.692
2006	2008	BBB-	341	0.01	0.2	0	0.037	29.134
2006	2008	BB+	211	0.02	0	1	0.000	9.000
2006	2008	BB+	211	0.02	0.05	1	0.769	11.196
2006	2008	BB+	211	0.02	0.1	1	0.300	16.021
2006	2008	BB+	211	0.02	0.15	1	0.122	20.598
2006	2008	BB+	211	0.02	0.2	1	0.048	25.141
2006	2008	BB	272	0.03	0	1	2.000	15.000
2006	2008	BB	272	0.03	0.05	1	1.827	21.778
2006	2008	BB	272	0.03	0.1	1	0.770	30.463
2006	2008	BB	272	0.03	0.15	1	0.337	38.592
2006	2008	BB	272	0.03	0.2	1	0.143	46.592
2006	2008	BB-	335	0.05	0	2	7.000	25.000
2006	2008	BB-	335	0.05	0.05	2	4.081	39.603
2006	2008	BB-	335	0.05	0.1	2	1.856	54.024
2006	2008	BB-	335	0.05	0.15	2	0.874	67.282
2006	2008	BB-	335	0.05	0.2	2	0.403	80.162
2006	2008	B+	482	0.08	0	7	24.000	50.000
2006	2008	B+	482	0.08	0.05	7	10.788	83.745
2006	2008	B+	482	0.08	0.1	7	5.321	110.971
2006	2008	B+	482	0.08	0.15	7	2.712	135.396
2006	2008	B+	482	0.08	0.2	7	1.357	158.665
2006	2008	B	312	0.13	0	6	26.000	53.000
2006	2008	B	312	0.13	0.05	6	13.579	81.074
2006	2008	B	312	0.13	0.1	6	7.351	103.593
2006	2008	B	312	0.13	0.15	6	4.099	123.088
2006	2008	B	312	0.13	0.2	6	2.251	141.103
2006	2008	B-	157	0.19	0	11	19.000	42.000
2006	2008	B-	157	0.19	0.05	11	12.129	56.642
2006	2008	B-	157	0.19	0.1	11	7.147	69.820
2006	2008	B-	157	0.19	0.15	11	4.324	80.771
2006	2008	B-	157	0.19	0.2	11	2.584	90.527
2006	2008	CCC+	62	0.30	0	12	11.000	27.000
2006	2008	CCC+	62	0.30	0.05	12	8.788	30.873

2006	2008	CCC+	62	0.30	0.1	12	5.699	36.443
2006	2008	CCC+	62	0.30	0.15	12	3.779	40.810
2006	2008	CCC+	62	0.30	0.2	12	2.482	44.497
2006	2008	CCC	22	0.46	0	4	5.000	16.000
2006	2008	CCC	22	0.46	0.05	4	5.761	14.659
2006	2008	CCC	22	0.46	0.1	4	4.154	16.459
2006	2008	CCC	22	0.46	0.15	4	3.047	17.757
2006	2008	CCC	22	0.46	0.2	4	2.220	18.769
2006	2008	CCC-	4	0.69	0	3	1.000	3.000
2006	2008	CCC-	4	0.69	0.05	3	1.942	3.395
2006	2008	CCC-	4	0.69	0.1	3	1.583	3.603
2006	2008	CCC-	4	0.69	0.15	3	1.303	3.734
2006	2008	CCC-	4	0.69	0.2	3	1.069	3.824
2010	2011	AAA	61	0.00	0	0	0.000	0.000
2010	2011	AAA	61	0.00	0.05	0	0.000	0.031
2010	2011	AAA	61	0.00	0.1	0	0.000	0.051
2010	2011	AAA	61	0.00	0.15	0	0.000	0.068
2010	2011	AAA	61	0.00	0.2	0	0.000	0.084
2010	2011	AA+	24	0.00	0	0	0.000	0.000
2010	2011	AA+	24	0.00	0.05	0	0.000	0.012
2010	2011	AA+	24	0.00	0.1	0	0.000	0.020
2010	2011	AA+	24	0.00	0.15	0	0.000	0.027
2010	2011	AA+	24	0.00	0.2	0	0.000	0.033
2010	2011	AA	136	0.00	0	0	0.000	1.000
2010	2011	AA	136	0.00	0.05	0	0.002	0.132
2010	2011	AA	136	0.00	0.1	0	0.000	0.212
2010	2011	AA	136	0.00	0.15	0	0.000	0.286
2010	2011	AA	136	0.00	0.2	0	0.000	0.353
2010	2011	AA-	197	0.00	0	0	0.000	1.000
2010	2011	AA-	197	0.00	0.05	0	0.005	0.277
2010	2011	AA-	197	0.00	0.1	0	0.001	0.442
2010	2011	AA-	197	0.00	0.15	0	0.000	0.596
2010	2011	AA-	197	0.00	0.2	0	0.000	0.739
2010	2011	A+	337	0.00	0	0	0.000	2.000
2010	2011	A+	337	0.00	0.05	0	0.016	0.755
2010	2011	A+	337	0.00	0.1	0	0.004	1.193
2010	2011	A+	337	0.00	0.15	0	0.001	1.609
2010	2011	A+	337	0.00	0.2	0	0.000	2.001
2010	2011	A	446	0.00	0	0	0.000	2.000
2010	2011	A	446	0.00	0.05	0	0.031	1.354
2010	2011	A	446	0.00	0.1	0	0.008	2.128
2010	2011	A	446	0.00	0.15	0	0.002	2.866
2010	2011	A	446	0.00	0.2	0	0.000	3.572
2010	2011	A-	498	0.00	0	0	0.000	3.000
2010	2011	A-	498	0.00	0.05	0	0.066	2.454

2010	2011	A-	498	0.00	0.1	0	0.018	3.818
2010	2011	A-	498	0.00	0.15	0	0.005	5.127
2010	2011	A-	498	0.00	0.2	0	0.001	6.398
2010	2011	BBB+	409	0.00	0	0	0.000	3.000
2010	2011	BBB+	409	0.00	0.05	0	0.100	3.181
2010	2011	BBB+	409	0.00	0.1	0	0.028	4.892
2010	2011	BBB+	409	0.00	0.15	0	0.008	6.542
2010	2011	BBB+	409	0.00	0.2	0	0.002	8.161
2010	2011	BBB	507	0.00	0	0	0.000	5.000
2010	2011	BBB	507	0.00	0.05	0	0.203	5.649
2010	2011	BBB	507	0.00	0.1	0	0.061	8.600
2010	2011	BBB	507	0.00	0.15	0	0.019	11.449
2010	2011	BBB	507	0.00	0.2	0	0.006	14.264
2010	2011	BBB-	378	0.01	0	0	0.000	6.000
2010	2011	BBB-	378	0.01	0.05	0	0.289	6.719
2010	2011	BBB-	378	0.01	0.1	0	0.094	10.074
2010	2011	BBB-	378	0.01	0.15	0	0.032	13.310
2010	2011	BBB-	378	0.01	0.2	0	0.010	16.527
2010	2011	BB+	191	0.01	0	2	0.000	5.000
2010	2011	BB+	191	0.01	0.05	2	0.250	4.973
2010	2011	BB+	191	0.01	0.1	2	0.086	7.350
2010	2011	BB+	191	0.01	0.15	2	0.031	9.635
2010	2011	BB+	191	0.01	0.2	2	0.011	11.912
2010	2011	BB	227	0.01	0	1	0.000	8.000
2010	2011	BB	227	0.01	0.05	1	0.554	9.147
2010	2011	BB	227	0.01	0.1	1	0.206	13.265
2010	2011	BB	227	0.01	0.15	1	0.080	17.198
2010	2011	BB	227	0.01	0.2	1	0.030	21.112
2010	2011	BB-	290	0.02	0	2	1.000	12.000
2010	2011	BB-	290	0.02	0.05	2	1.290	17.614
2010	2011	BB-	290	0.02	0.1	2	0.516	25.026
2010	2011	BB-	290	0.02	0.15	2	0.215	32.032
2010	2011	BB-	290	0.02	0.2	2	0.087	38.968
2010	2011	B+	333	0.04	0	0	5.000	20.000
2010	2011	B+	333	0.04	0.05	0	2.835	31.181
2010	2011	B+	333	0.04	0.1	0	1.231	43.198
2010	2011	B+	333	0.04	0.15	0	0.554	54.373
2010	2011	B+	333	0.04	0.2	0	0.244	65.322
2010	2011	B	358	0.06	0	3	12.000	33.000
2010	2011	B	358	0.06	0.05	3	6.224	53.102
2010	2011	B	358	0.06	0.1	3	2.967	71.253
2010	2011	B	358	0.06	0.15	3	1.463	87.715
2010	2011	B	358	0.06	0.2	3	0.707	103.540
2010	2011	B-	252	0.10	0	7	15.000	37.000
2010	2011	B-	252	0.10	0.05	7	8.237	55.207

2010	2011	B-	252	0.10	0.1	7	4.281	71.701
2010	2011	B-	252	0.10	0.15	7	2.296	86.220
2010	2011	B-	252	0.10	0.2	7	1.211	99.833
2010	2011	CCC+	96	0.17	0	9	8.000	25.000
2010	2011	CCC+	96	0.17	0.05	9	6.149	31.185
2010	2011	CCC+	96	0.17	0.1	9	3.522	38.913
2010	2011	CCC+	96	0.17	0.15	9	2.074	45.430
2010	2011	CCC+	96	0.17	0.2	9	1.205	51.313
2010	2011	CCC	57	0.28	0	20	8.000	24.000
2010	2011	CCC	57	0.28	0.05	20	7.306	26.963
2010	2011	CCC	57	0.28	0.1	20	4.661	32.070
2010	2011	CCC	57	0.28	0.15	20	3.042	36.118
2010	2011	CCC	57	0.28	0.2	20	1.966	39.571
2010	2011	CCC-	15	0.46	0	5	3.000	11.000
2010	2011	CCC-	15	0.46	0.05	5	3.983	10.056
2010	2011	CCC-	15	0.46	0.1	5	2.879	11.277
2010	2011	CCC-	15	0.46	0.15	5	2.117	12.156
2010	2011	CCC-	15	0.46	0.2	5	1.546	12.839
2010	2012	AAA	61	0.00	0	0	0.000	1.000
2010	2012	AAA	61	0.00	0.05	0	0.002	0.086
2010	2012	AAA	61	0.00	0.1	0	0.000	0.137
2010	2012	AAA	61	0.00	0.15	0	0.000	0.185
2010	2012	AAA	61	0.00	0.2	0	0.000	0.229
2010	2012	AA+	24	0.00	0	0	0.000	1.000
2010	2012	AA+	24	0.00	0.05	0	0.001	0.054
2010	2012	AA+	24	0.00	0.1	0	0.000	0.085
2010	2012	AA+	24	0.00	0.15	0	0.000	0.115
2010	2012	AA+	24	0.00	0.2	0	0.000	0.143
2010	2012	AA	136	0.00	0	0	0.000	1.000
2010	2012	AA	136	0.00	0.05	0	0.009	0.413
2010	2012	AA	136	0.00	0.1	0	0.002	0.649
2010	2012	AA	136	0.00	0.15	0	0.001	0.874
2010	2012	AA	136	0.00	0.2	0	0.000	1.089
2010	2012	AA-	197	0.00	0	0	0.000	2.000
2010	2012	AA-	197	0.00	0.05	0	0.021	0.824
2010	2012	AA-	197	0.00	0.1	0	0.005	1.287
2010	2012	AA-	197	0.00	0.15	0	0.001	1.731
2010	2012	AA-	197	0.00	0.2	0	0.000	2.159
2010	2012	A+	337	0.00	0	0	0.000	3.000
2010	2012	A+	337	0.00	0.05	0	0.054	1.907
2010	2012	A+	337	0.00	0.1	0	0.015	2.956
2010	2012	A+	337	0.00	0.15	0	0.004	3.966
2010	2012	A+	337	0.00	0.2	0	0.001	4.949
2010	2012	A	446	0.00	0	0	0.000	4.000
2010	2012	A	446	0.00	0.05	0	0.122	3.775

2010	2012	A	446	0.00	0.1	0	0.035	5.793
2010	2012	A	446	0.00	0.15	0	0.011	7.739
2010	2012	A	446	0.00	0.2	0	0.003	9.653
2010	2012	A-	498	0.00	0	0	0.000	5.000
2010	2012	A-	498	0.00	0.05	0	0.224	6.037
2010	2012	A-	498	0.00	0.1	0	0.068	9.166
2010	2012	A-	498	0.00	0.15	0	0.022	12.187
2010	2012	A-	498	0.00	0.2	0	0.007	15.177
2010	2012	BBB+	409	0.01	0	0	0.000	6.000
2010	2012	BBB+	409	0.01	0.05	0	0.320	7.395
2010	2012	BBB+	409	0.01	0.1	0	0.104	11.080
2010	2012	BBB+	409	0.01	0.15	0	0.035	14.635
2010	2012	BBB+	409	0.01	0.2	0	0.012	18.170
2010	2012	BBB	507	0.01	0	1	0.000	9.000
2010	2012	BBB	507	0.01	0.05	1	0.642	12.911
2010	2012	BBB	507	0.01	0.1	1	0.221	19.097
2010	2012	BBB	507	0.01	0.15	1	0.079	25.047
2010	2012	BBB	507	0.01	0.2	1	0.027	30.976
2010	2012	BBB-	378	0.01	0	1	1.000	10.000
2010	2012	BBB-	378	0.01	0.05	1	0.871	14.630
2010	2012	BBB-	378	0.01	0.1	1	0.321	21.256
2010	2012	BBB-	378	0.01	0.15	1	0.124	27.590
2010	2012	BBB-	378	0.01	0.2	1	0.046	33.895
2010	2012	BB+	191	0.02	0	2	0.000	9.000
2010	2012	BB+	191	0.02	0.05	2	0.726	10.430
2010	2012	BB+	191	0.02	0.1	2	0.285	14.902
2010	2012	BB+	191	0.02	0.15	2	0.116	19.142
2010	2012	BB+	191	0.02	0.2	2	0.046	23.348
2010	2012	BB	227	0.03	0	1	2.000	13.000
2010	2012	BB	227	0.03	0.05	1	1.529	18.212
2010	2012	BB	227	0.03	0.1	1	0.645	25.471
2010	2012	BB	227	0.03	0.15	1	0.282	32.265
2010	2012	BB	227	0.03	0.2	1	0.120	38.952
2010	2012	BB-	290	0.05	0	3	6.000	22.000
2010	2012	BB-	290	0.05	0.05	3	3.413	33.531
2010	2012	BB-	290	0.05	0.1	3	1.545	45.812
2010	2012	BB-	290	0.05	0.15	3	0.725	57.116
2010	2012	BB-	290	0.05	0.2	3	0.333	68.106
2010	2012	B+	333	0.07	0	3	14.000	36.000
2010	2012	B+	333	0.07	0.05	3	7.107	56.174
2010	2012	B+	333	0.07	0.1	3	3.483	74.615
2010	2012	B+	333	0.07	0.15	3	1.764	91.196
2010	2012	B+	333	0.07	0.2	3	0.877	107.019
2010	2012	B	358	0.12	0	16	28.000	57.000
2010	2012	B	358	0.12	0.05	16	14.180	87.986

2010	2012	B	358	0.12	0.1	16	7.573	113.043
2010	2012	B	358	0.12	0.15	16	4.169	134.859
2010	2012	B	358	0.12	0.2	16	2.259	155.120
2010	2012	B-	252	0.18	0	16	31.000	59.000
2010	2012	B-	252	0.18	0.05	16	17.184	84.802
2010	2012	B-	252	0.18	0.1	16	9.937	105.394
2010	2012	B-	252	0.18	0.15	16	5.904	122.675
2010	2012	B-	252	0.18	0.2	16	3.463	138.208
2010	2012	CCC+	96	0.27	0	15	16.000	36.000
2010	2012	CCC+	96	0.27	0.05	15	11.666	44.176
2010	2012	CCC+	96	0.27	0.1	15	7.378	52.751
2010	2012	CCC+	96	0.27	0.15	15	4.777	59.587
2010	2012	CCC+	96	0.27	0.2	15	3.061	65.448
2010	2012	CCC	57	0.41	0	20	15.000	32.000
2010	2012	CCC	57	0.41	0.05	20	12.416	34.956
2010	2012	CCC	57	0.41	0.1	20	8.662	39.869
2010	2012	CCC	57	0.41	0.15	20	6.156	43.515
2010	2012	CCC	57	0.41	0.2	20	4.343	46.436
2010	2012	CCC-	15	0.60	0	6	5.000	13.000
2010	2012	CCC-	15	0.60	0.05	6	5.883	11.796
2010	2012	CCC-	15	0.60	0.1	6	4.585	12.772
2010	2012	CCC-	15	0.60	0.15	6	3.619	13.422
2010	2012	CCC-	15	0.60	0.2	6	2.843	13.890
